Aplicación de la transformada de Laplace en el cálculo de circuitos eléctricos

Christian Ariel Kent

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
christian.a.kent@gmail.com
Septiembre de 2011

Resumen: La transformada de Laplace es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales. En este documento se desarrolla su aplicación en la resolución de circuitos eléctricos que contienen una o más mallas. Se da un ejemplo para explicar el procedimiento.

Palabras clave: transformada, Laplace, circuitos, mallas

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace tiene diversas aplicaciones. Una de las más importantes, es que permite resolver ecuaciones diferenciales de forma sencilla.

Básicamente, es una función que transforma una función de una variable t a una variable s (ver esquema de la transformación en Figura 1)

Matemáticamente, la transformada de Laplace está definida de la siguiente forma:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Cuando se aplica la transformada no es necesario calcular la integral, ya que existen tablas con propiedades y transformaciones que agilizan el proceso.

Para el planteo de las ecuaciones que caracterizan a los circuitos se deben tener en cuenta las leyes de Kirchhoff, como así también las caídas de tensión producidas en las resistencias, inductores y capacitores (elementos fundamentales de cualquier circuito eléctrico).

- Caída de voltaje en una resistencia = i.R (corriente.resistencia)
- Caída de voltaje en un capacitor = $\frac{q}{c} = \int i \, . \, dt$
- Caída de voltaje en un inductor = $L \, . \, \frac{d\,i}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \, . \, L$

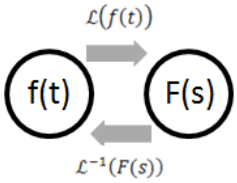

Figura 1 – Esquema de la transformación de Laplace

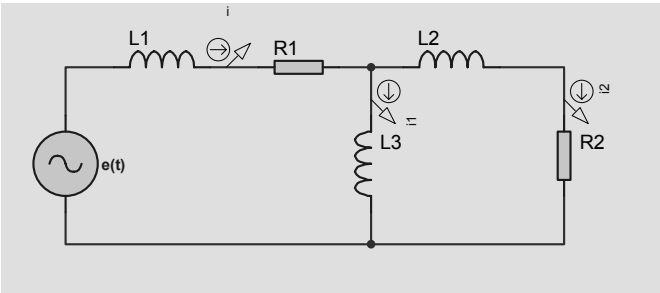

Figura 2 – Esquema del circuito

Las leyes de Kirchhoff son las siguientes:

- En cualquier nodo, la suma de la corriente que entra en ese nodo es igual a la suma de la corriente que sale. De igual forma, La suma algebraica de todas las corrientes que pasan por el nodo es igual a cero

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + I_2 + I_3 \ldots + I_n = 0$$

- En toda malla la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada. De forma equivalente, En toda malla la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico es igual a cero.

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = V_1 + V_2 + V_3 \ldots + V_n = 0$$

II. CALCULO DE VARIABLES DE UN CIRCUITO APLICANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A continuación se presenta un circuito y el planteo de las ecuaciones diferenciales, haciendo uso de las leyes de Kirchhoff.

A. Circuito

En la figura 2 se puede apreciar el esquema del circuito sobre el cual se calcularon las corrientes y demás.

B. Planteo de las ecuaciones

$$\begin{cases} e(t) = L1.\frac{di}{dt} + i.R1 + L3.\frac{di1}{dt} & (1) \\ L2.\frac{di2}{dt} + i2.R2 = L3.\frac{di1}{dt} & (2) \end{cases}$$

Se conoce (por leyes de Kirchhoff):

$$i=i1+i2 \quad (3)$$

Y además que la corriente en t=0 es i(0)=0.

Reemplazando (3) en la ecuación (1) :

$$e(t) = L1.\frac{di1}{dt} + L1.\frac{di2}{dt} + i1.R1 + i2.R1 + L3.\frac{di1}{dt} \quad (4)$$

En el caso de que los componentes electrónicos tengan los siguientes valores:

R1=10Ω
R2=20Ω
L1=0,5H
L2=1H
L3=1H
e(t)=cte.=100V

Las ecuaciones (2) y (4) quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 100 = \left(\frac{1}{2}+1\right).\frac{di1}{dt}+\frac{1}{2}.\frac{di2}{dt}+10.i1+10.i2 & (5) \\ \frac{di1}{dt}=\frac{di2}{dt}+i2.20 & (6) \end{cases}$$

La transformada de Laplace en este circuito se la define de la siguiente forma:

$\mathcal{L}(i1(t)) = I1(s)$
$\mathcal{L}(i2(t)) = I2(s)$

Aplicando propiedades de la transformada de Laplace sobre las ecuaciones (5) y (6) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \frac{100}{s}=\frac{3}{2}.s.I1(s)-i1(0)+\frac{1}{2}.s.I2(s)-i2(0)+10.I1(s)+10.I2(s) & (7) \\ s.I1(s)-i1(0)=s.I2(s)-i2(0)+20.I2(s) & (8) \end{cases}$$

Donde i1(0)=0 y i2(0)=0.

Despejando I2(s) de la ecuación (8) y luego reemplazándola en la ecuación (7) :

$$I2 = I1.\frac{s}{s+20} \quad (9)$$

$$I1 = \frac{100}{s.\left(\frac{3}{2}s+10+\left(\frac{s}{s+20}\right)\left(\frac{1}{2}s+10\right)\right)} \quad (10)$$

Anti-transformando (usando las propiedades de la transformada de Laplace) se obtienen las expresiones de la corriente i1 e i2 en función del tiempo.

$$i1(t) = \mathcal{L}^{-1}(I1(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{100}{s.\left(\frac{3}{2}s+10+\left(\frac{s}{s+20}\right)\left(\frac{1}{2}s+10\right)\right)}\right) \quad (11)$$

$$i1(t) = 10-10.e^{-8t} \quad (12)$$

Anti transformando la ecuación (9) se obtiene:

$$i2(t) = \mathcal{L}^{-1}(I2(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{100}{\left(\frac{3}{2}s+10+\left(\frac{s}{s+20}\right)\left(\frac{1}{2}s+10\right)\right)}\right).\frac{1}{s+20}\right) \quad (13)$$

$$i2(t) = \frac{10}{3}.e^{-20t}.(e^{15t}-1) \quad (14)$$

Las ecuaciones (12) y (14) corresponden a las corriente i1(t) e i2(t) en el circuito (Figura 2).
De esta forma la corriente i(t) es la suma de i1(t) e i2(t): ecuación (15).

$$i(t) = i1(t) + i2(t) = \frac{10}{3}.e^{-20t}.(e^{15t}-1) + 10 - 10.e^{-5t} \quad (15)$$

III. PASOS PARA TRABAJAR CON LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE PARA ANALIZAR CIRCUITOS.

Como se pudo observar en el ejemplo anterior, la transformada de Laplace simplifica mucho la resolución del circuito para obtener las variables elementales, en ese caso la corriente.

Básicamente se deben llevar a cabo cuatro pasos:

1- Planteo de las ecuaciones que caracterizan al circuito (haciendo uso de las leyes de Kirchhoff), con todas sus variables en función del tiempo.
2- Transformación de las funciones (preferentemente la corriente) a la variable “s”.
3- Despeje de las corrientes en función de “s”.
4- Anti transformación de las funciones de “s” para volver a la variable “t” (tiempo).

IV. CONCLUSIONES

La transformada de Laplace es una herramienta matemática que facilita la resolución de ecuaciones diferenciales. En el caso de la ingeniería eléctrica o electrónica, permite resolver circuitos eléctricos de forma sencilla, que bajo otros métodos podrían resultar muy complicados.

V. REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. *2do. Cuatrimestre 2010,* pp. 56-59. 2010.
[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, pp.99-103, 130-135.
[3] http://es.wikipedia.org/, Wikipedia, La enciclopedia libre.