Uso de Fasores e Impedancias para resolución de circuitos

Carlos A. Grassi

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
yopiri_66@hotmail.com
Septiembre de 2012

Resumen: En este informe se mencionara una aplicación a la ingeniería por parte de las Funciones de Variable Compleja, en primer lugar se dará el concepto de fasores, donde se demostrara que un fasor es una representación compleja de la magnitud y fase de una senoide, luego se examinara la representación de fasores en el plano complejo, posteriormente se definirá impedancia y su relación con las magnitudes eléctricas de resistencia, inductancia y capacitancia. Para finalizar se explicara la resolución de un circuito RLC utilizando fasores y expresiones algebraicas.

Palabras clave: fasores, impedancia, senoide.

I. INTRODUCCION

En este informe se inicia el análisis de circuitos en los que la tensión o la corriente de fuente varían con el tiempo. Se interesará en particular la excitación senoidal variable con respecto al tiempo, o simplemente excitación por una senoide. Se expondrá la resolución de un circuito básico para poder observar de manera practica la utilización de números complejos en la resolución de los mismos, para poder entender con facilidad el desarrollo de este informe se recomienda poseer conocimientos básicos de circuitos eléctricos.

II. CIRCUITOS CON EXCITACIÓN SINUSOIDAL

Las senoides[1] se expresan fácilmente en términos de fasores, con los que es mas cómodo trabajar que con las funciones seno y coseno.

Un fasor es un número complejo que representa la amplitud y la fase de una senoide.

Los fasores brindan un medio sencillo para analizar circuitos lineales excitados por fuentes senoidales; las soluciones de tales circuitos serian impracticables de otra manera.

La idea de la representación fasorial se basa en la identidad de Euler. En general,

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\,\mathrm{sen}\phi \tag{1}$$

Es decir se puede considerar a $\cos\phi$ y $\mathrm{sen}\phi$ como las partes real e imaginaria de $e^{j\phi}$;

$$\cos\phi = \mathrm{Re}(e^{j\phi}) \tag{2}$$
$$\mathrm{sen}\phi = \mathrm{Im}(e^{j\phi}) \tag{3}$$

Dada una senoide $v(t) = V_m\cos(\omega t+\phi)$, se usa (2) para expresar v(t) como

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)}) \tag{4}$$

Es decir

$$v(t) = \mathrm{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}) \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$v(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t}) \tag{6}$$

Donde

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} \tag{7}$$

V es entonces la representación fasorial de la senoide v (t), en otras palabras, un fasor es una representación compleja de la magnitud y fase de una senoide. La ecuación (2) o (1) puede utilizarse para desarrollar un fasor.

Una manera de examinar (6) y (7) es considerar la gráfica del sinor en el plano complejo. Al aumentar el tiempo, el sinor rota en un círculo de radio V_m a una velocidad angular ω en sentido contrario a las manecillas del reloj. Se puede considerar v (t) como la proyección del sinor en el eje real, como se advierte en la figura 1. El valor del sinor en el tiempo t=0 es el fasor **V** de la senoide v (t).

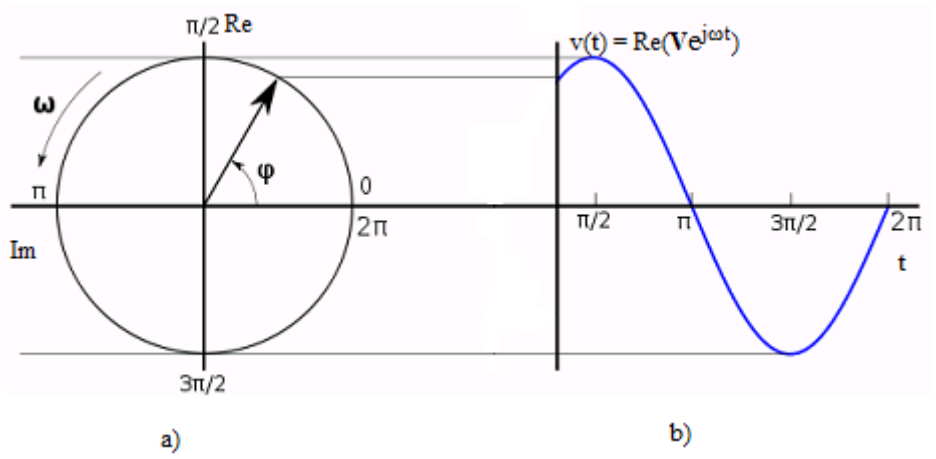

Figura 1: representación de $\mathbf{V}e^{j\omega t}$: a) sinor que rota en sentido contrario de las manecillas del reloj, b) su proyección en el eje real, como función del tiempo.

A. *Impedancia*

La impedancia (**Z**) de un circuito es la razón entre la tensión fasorial y la corriente fasorial (**I**).

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V} / \mathbf{I} \tag{8}$$

Representa la oposición que exhibe el circuito al flujo de la corriente senoidal. Aunque es la relación entre dos fasores, la impedancia no es un fasor, porque no corresponde a una cantidad que varié senoidalmente.

Las impedancias de resistores, inductores y capacitores pueden expresarse como

Elemento	Impedancia
L	**Z** = jωL
R	**Z** = R
C	**Z** = 1/jωC

Tabla 1: Impedancia correspondiente a cada elemento

Considerando dos casos extremos de frecuencia angular. Cuando ω = 0 (es decir para el caso de fuentes de cd), $\mathbf{Z}_L = 0$ y $\mathbf{Z}_C \to \infty$, en este caso, el inductor actúa como cortocircuito, en tanto que el capacitor lo hace como circuito abierto. Cuando $\omega \to \infty$ (es decir, para el caso de altas frecuencias), $\mathbf{Z}_L \to \infty$ y $\mathbf{Z}_C = 0$, lo que indica que el inductor es un circuito abierto en altas frecuencias, en tanto que el capacitor es un cortocircuito.

Como cantidad compleja, la impedancia puede expresarse en forma rectangular como

$$\mathbf{Z} = R + jX \tag{9}$$

Donde R es la resistencia y X es la reactancia.

La impedancia también puede expresarse en forma polar como

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|_{\theta}$$

A continuación hallamos v_0 (t) del siguiente circuito, utilizando los conceptos mencionados anteriormente,

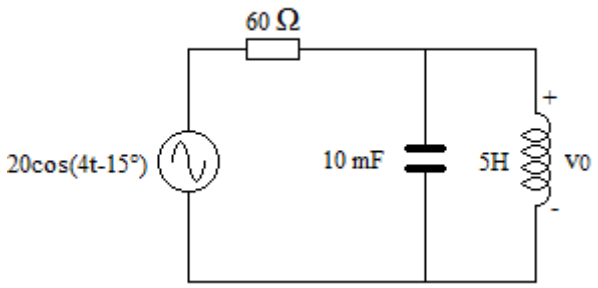

Figura 2: Circuito RCL

Para hacer el análisis en el dominio de la frecuencia, primero se debe transformar el circuito en el dominio temporal al equivalente en el dominio fasorial. Esta transformación produce,

$$V_s = 20\cos(4t - 15°) \rightarrow \omega = 4$$

$$10\text{ mF} \rightarrow 1/j\omega C = 1/(j4 \times 10 \times 10^{-3}) = -j25\Omega$$

$$5\text{H} \rightarrow j\omega L = j4 \times 5 = j20\Omega$$

Sean

$\mathbf{Z_1}$ = impedancia del resistor de 60Ω

$\mathbf{Z_2}$ = impedancia de la combinación en paralelo del capacitor de 10 mF y el inductor de 5 H

Así, $\mathbf{Z_1} = 60\Omega$ y

$$\mathbf{Z_2} = -j25 \parallel j20 = (-j25 \times j20)/ (-j25 + j20) = j100\Omega$$

Por el principio de división de tensión,

$$\mathbf{V}_0 = (\mathbf{Z_2} / (\mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2}))\ \mathbf{V_s} = (j100/ (60 + j100))\ 20_{(-15°)}$$

$$\mathbf{V}_0 = (0.8575_{(30.96°)})(20_{(-15°)}) = 17.15_{(15.96°)}$$

Se convierte esto al dominio temporal y se obtiene

$$V_0 (t) = 17.5 \cos(4t + 19.96°) \qquad (10)$$

Como resultado se obtiene la ecuación (10).

III. CONCLUSION

Como se pudo observar a lo largo de este informe y específicamente en la resolución del circuito RCL la utilización de números complejos por medio de fasores e impedancias facilita notablemente el cálculo de tensión y corriente de los elementos de un circuito en corriente alterna, ya que de otra manera la única solución sería la utilización de ecuaciones diferenciales que a la hora de la resolución se tornaría engorroso.

[1]Forma de onda cuyo grafico es idéntico a la función seno.

REFERENCIAS

[1]. Charles K. Alexander, Mattehew N. O. Sadiku, *Fundamentos de Circuitos Electricos*, 2006

[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/impedancia, [acceso el 2 de Agosto de 2012].

.