Aplicación de la transformada de Laplace en circuitos RLC

Carlos G. Antonio Caseres

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Caseres.carlos30@gmail.com
Agosto 2012

Resumen: En este informe se mostrara una de las aplicaciones de la transformada de Laplace, en este caso, veremos como aplicarlo a problema muy común en electromagnetismo que es la resolución de un circuito eléctrico (RLC)

Palabras clave: transformada de Laplace, circuito RLC .

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace, es una herramienta muy importante en el ámbito de la ingeniería. Entre sus muchas virtudes la transformada de Laplace transforma derivadas en polinomios, y por lo tanto, ecuaciones diferenciales ordinarias en ecuaciones algebraicas, la cual podemos solucionar con mayor facilidad.

En los problemas de circuitos RLC, la solución de dichos problemas nos llevan a desarrollar ecuaciones diferenciales, las cuales llegan a ser muy tediosas, y es aquí donde usaremos la transformada de Laplace, para resolver dichos circuitos.

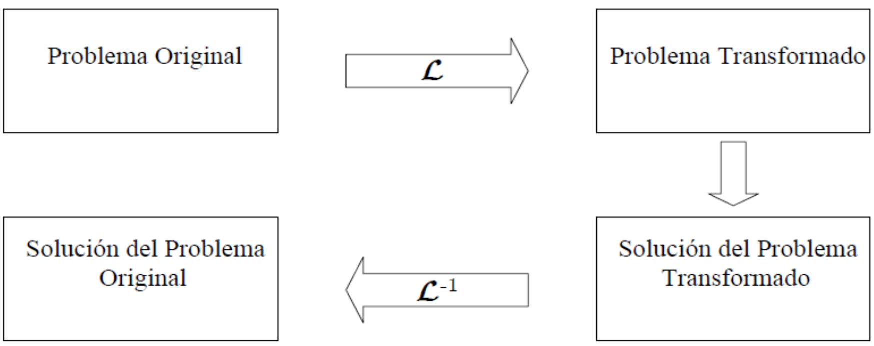
II. TRANSFORMADA DE LAPLACE, DEFINICIÓN Y PROPIEDADES.

Definimos a la transformada de Laplace de una función f mediante la expresión

$$\mathcal{L}(f(t))=F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt$$

Donde S es una variable compleja y e^{-st} es llamado el **núcleo** de la transformación. Es usual representar la transformada de Laplace de una función *f(t)* , por la letra mayúscula correspondiente F.

En la resolución de circuitos RLC, la ecuación diferencial que esta en el dominio del tiempo (mediante la Transformada de Laplace) pasan al dominio en un campo *S*. Una vez resuelto, efectuando las respectivas operaciones algebraicas, se aplica la Transformada Inversa de Laplace para obtener la respuesta en el domino del tiempo, como veremos aquí:



Pasos a seguir, para la resolución de los problemas.

A. Propiedades a tener en cuenta de la transformada de Laplace

Para la resolver los problemas, no lo haremos por definición, si no por propiedades que tiene la transformada de Laplace:

Linealidad: Para α, β pertenecientes a los complejos

$\alpha f(t) + \beta g(t)$ $\alpha F(s) + \beta G(s)$ $Re(s)>max(p,q)$

Translación: Para α pertenecientes a los complejos

$e^{\alpha t}f(t)$ $F(s-\alpha)$ $Re(s)> s + Re(\alpha)$

Derivadas:

$f^{(n)}(t)$ $s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ $Re(s)>p$

Y entre otras tantas.

III. CIRCUITO RLC.

Un circuito RLC (o circuito LCR) es un circuito eléctrico que consta de una resistencia, un inductor, y un condensador, conectados en serie o en paralelo. La parte RLC del nombre se debe a esas letras que son los símbolos habituales eléctricos para la resistencia, la inductancia y la capacitancia, respectivamente.

B. Resistores

Se denomina resistor, al componente eléctrico diseñado para introducir una resistencia eléctrica determinada entre dos puntos de un circuito. La resistencia se abrevia con la letra R y se mide en ohmio que se designa con el símbolo Ω.

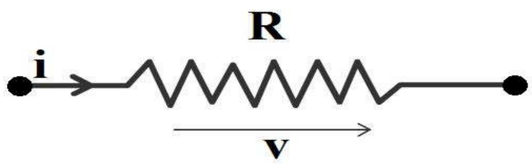


Figura 1. Resistor.

C. Inductores

Un inductor o bobina, es un componente pasivo de un circuito eléctrico que, debido al fenómeno de auto inducción almacena energía en forma de campo magnético. Se denomina con la letra L y se mide en Hernios (H)

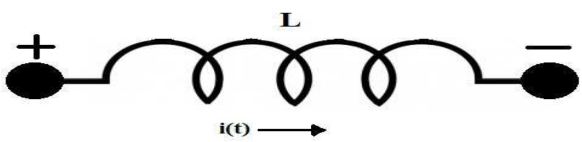


Figura 2. Inductor.

D. Capacitores

El capacitor es un dispositivo para almacenar energía, consiste en dos placas (planos) de un conductor enfrentada paralelamente sin hacer contacto, y un material dieléctrico (no conductor) entre ellas. La capacitancia se mide en faradios (F), y se representa con la letra C.

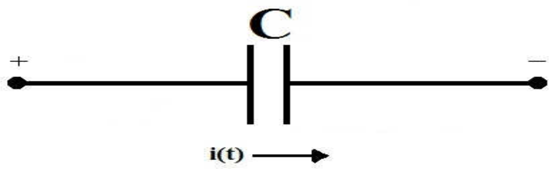


Figura 3. Capacitor.

Estos tres dispositivos se asocian mediante una de las **leyes de Kirchhoff**:

Ley 1 : La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier unión (o nodo) de un circuito es cero.

Ley 2: la suma algebraica de la caída de voltaje alrededor de cualquier curva cerrada (o trayectoria) en un circuito es cero.

IV. EJEMPLO DE APLICACIÓN.

En el circuito que se indica a continuación, obtener la carga y la corriente para cualquier tiempo,

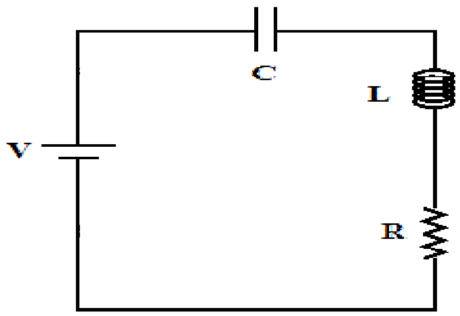


Figura 4. Circuito RLC.

Sabiendo que: V=10 [volt]
R=20 [ohm]
L=1 [hernio]
C=1 $* 10^{-2}$ [faradios]
Y que en t=0, q=0 y i=0.

Sabiendo esto datos, aplicaremos la ley de Kirchhof

V_{total}=$V_{bobina} + V_{resistencia} + V_{capasitor}$ (1)

El voltaje de cada una de las partes se puede escribir de la siguiente manera:

$V_{bobina} = L\frac{di}{dt}$, $V_{resistencia} = i * R$ y $V_{capasitor} = \frac{q}{C}$ (2)

Ahora remplazamos (2) en (1) y con los datos ya dados, nos queda:

10= $\frac{di}{dt}$ + 20*i + 100*q (3)

Sabemos que:

i=$\frac{dq}{dt}$ (4)

Entonces (3) nos queda:

10= $\frac{d}{dt} * \frac{dq}{dt} + 20 * \frac{dq}{dt} + 100 * q$ (5)

De esta manera, aplicamos la transformada de Laplace en toda la ecuación:

$\mathcal{L}$(10)= $\mathcal{L}(\frac{d}{dt} * \frac{dq}{dt})$ + $\mathcal{L}(20 * \frac{dq}{dt})$ + $\mathcal{L}(100 * q)$ (6)

Nos queda:

$\frac{10}{s} = s^2Q(s) - sq(0) + 20 * sQ(s) + 100 * Q(s)$ (7)

Despejando Q(s) de la ecuación (7), nos queda:

$$Q(s) = \frac{10}{s(s^2+20s\ 100)} = \frac{10}{s(s+10)^2} \quad (8)$$

Anti transformamos a Q(s) para obtener q(t):

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Q(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{s(s+10)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{0{,}1}{s} - \frac{0{,}1}{s+10} - \frac{1}{(s+10)^2}\right) \quad (9)$$

Y así nos queda resuelto parte de nuestro ejercicio:

q(t)= 0,1 – (0,1)e^{-10t} $- te^{-10t}$ (10)

Para obtener la corriente (i) en función del tiempo, solo debemos derivar la carga (q) en función del tiempo:

i(t)=$\frac{dq}{dt}$ = $e^{-10t} + 10te^{-10t} - e^{-10t} = 10te^{-10t}$ (11)

Llegando hasta este punto, podremos representar la grafica de i(t) y q(t)

V. CONCLUSIÓN.

En este informe se puede apreciar, que fue relativamente sencillo resolver el problema del circuito RLC, esto se debe a que la ecuación diferencial se pudo plantear de otra manera usando la transformada de Laplace, facilitando nuestros cálculos y la comprensión de nuestro problema.

REFERENCIAS

[1] Glyn James,” *matemáticas avanzadas para ingeniería*”. Segunda edición. Pearson educación, 2002, pp. 99-100.

[2] Guillermo Calandrini, “Guia de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funcion de Variable compleja 1er Cuatrimestre 2012. pp 61.

[3] Transformada de Laplace aplicaciones [internet] disponible en http://ocw.bib.upct.es/pluginfile.php/7526/mod_resource/content/1/tema8.pdf [Acceso el 5 de agosto del 2012].

[4] Wikipedia, *la enciclopedia libre*, condensador [internet] disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Capacitor [Acceso el 5 de agosto del 2012].

[5] Wikipedia, *la enciclopedia libre*, inductor [internet] disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Inductor [Acceso el 5 de agosto del 2012].

[6] Wikipedia *la enciclopedia libre*, resistor [internet] disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Resistor [Acceso el 5 de agosto del 2012].