Transformada Z en el diseño de Sistemas de tiempo Discretos

Cardozo Jorge Silvio

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Jorge_musician@hotmail.com

Diciembre 2013

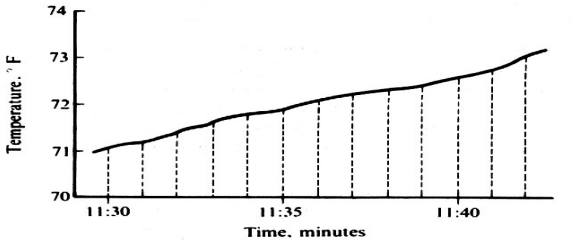
Resumen: En este informe veremos cómo determinar funciones de transferencia discretas y diseñar funciones de transferencia mediante el uso del método de la Transformada Z.

I. INTRODUCCIÓN

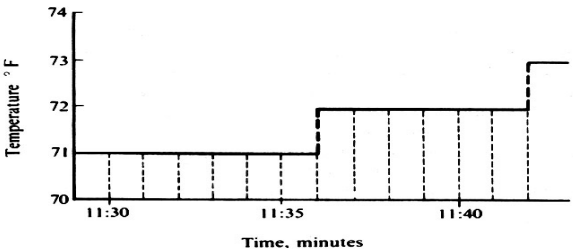
Un desarrollo importante en muchas áreas de la ingeniería moderna es el reemplazo de dispositivos analógicos por digitales. Uno de los ejemplos mas conocidos es el reproductor de discos compactos en donde la trascripción mecánica seguida por un procesamiento de señal analógica ha sido sustituida por tecnología óptica y por un procesamiento de seña digital.

Hay varios tipos de sistemas de control, pero en este artículo en particular se tratarán los sistemas de tiempo discreto.

Los sistemas de tiempo discreto trabajan con señales que sólo pueden cambiar de valor en instantes de tiempo discretos (contrastar con sistemas analógicos /continuos).



a) An analog signal of the outside air temperature



b) A digital signal of the outside air temperature

Antes de comenzar con esto vamos a definir ciertos conceptos que facilitaran mas la comprensión de este breve informe.

La transformada de Laplace:

Ya hemos visto su utilidad para sistemas analógicos lineales e invariantes en el tiempo.

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t).e^{-s.t}.dt$$

Sabemos cómo usar tablas para calcular la transformada de Laplace de una función en el tiempo, y su inversa, para retornar de las funciones de variable compleja al dominio temporal.

Sabemos una serie de propiedades y teoremas (linealidad, valor final, inicial, etc.)

Vamos a buscar algo análogo, que nos facilite el análisis y diseño de sistemas de control en tiempo discreto.

La Transformada Z :

Es una transformación que se aplica a sucesiones de números (reales) y devuelve una función de variable compleja.

Usaremos la transformada *Z* unilateral, porque consideraremos funciones (o sucesiones) que arrancan en determinado tiempo.

Definición 88: La Transformada Z unilateral de una sucesión se define como la siguiente serie de potencias

$$Z[\{e(k)\}] = E(z) = e(0) + e(1).z^{-1} + e(2).z^{-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} e(k).z^{-k}$$

Ejemplos

1) Sea $E(z) = 1 + 3.z\text{-}1 - 2.z\text{-}2 + z\text{-}4 + \ldots$, $\{e(k)\} = ?$

e(0) = 1; e(1) = 3; e(2) = -2; e(3) = 0; e(4) = 1; ....

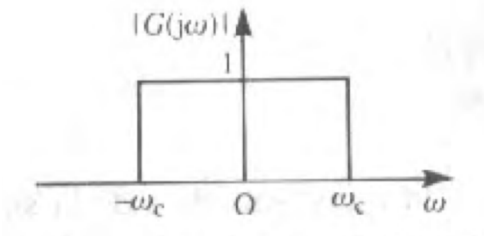
2) Sea $e(k) = 1$ para todo k, $E(z) = ?$

$$E(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \qquad \left|z^{-1}\right| < 1$$

Nota: $e(k) = 1$ puede ser generada por muestreo de un escalón unitario, o de cualquier otra función que valga 1 cada T seg.

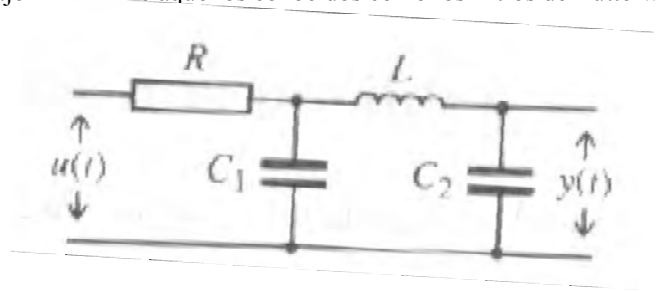
II. FILTROS ANALÓGICOS

Los filtros tienen una gran importancia en la mayoría de las aplicaciones de proceso de señales. Estos tienen el efecto de cambiar el espectro de señales de entrada, esto es, las componentes atenuantes de señales por una cantidad que depende de la frecuencia de la componente. Por ejemplo, un filtro ideal de paso bajo analógico pasa sin atenuación todas las componentes de la señal a frecuencias menores que la frecuencia crítica ω = ωc. La amplitud de la frecuencia de respuesta |G(jω)| de tal filtro se muestra en la " Figura I ".



"Figura I" Respuesta de amplitud para un filtro ideal de paso bajo

Una clase de filtros analógicos cuya frecuencia de respuesta aproxima aquella del filtro ideal de paso bajo comprende aquellos conocidos como los filtros de Butterworth.



"Figura II" Red RLC para implementar un filtro de Butterworth de segundo orden

Además de tener características "buenas", estos pueden implementarse usando una red como la ilustrada en la "Figura II" para un filtro de segundo orden.

Se puede probar que la función de transferencia Gn(s) del filtro de orden n es

$$G_n(s) = \frac{1}{B_n(x)} \quad donde \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k x^k)$$

Como

$$x = \frac{s}{\omega_c}, \qquad a_k = \prod_{r=1}^{k} \frac{\boldsymbol{cos(r-1)\alpha}}{\boldsymbol{sen(r\alpha)}}, \quad \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2n}}$$

Usando estas relaciones, se prueba fácilmente que

$$G_2(s) = \frac{{\omega_c}^2}{s^2 + \sqrt{2\omega_c s} + {\omega_c}^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$G_3(s) = \frac{{\omega_c}^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2{\omega_c}^2 s + {\omega_c}^3} \qquad \textbf{(3)}$$

Y así sucesivamente. Haciendo una gráfica de las amplitudes de las frecuencias de respuesta Gn(jω), se ve claramente que al incrementar n se mejora la aproximación de respuesta del filtro ideal de paso bajo de la "Figura I".

III. DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL DE REEMPLAZO

Supongamos que ahora queremos diseñar un sistema de tiempo discreto que funcione en muestreos tomados de una señal de entrada, esto funcionará de manera similar al filtro de Butterworth. Supondremos que la señal de entrada u(t) y la señal de salida y(t) de un filtro analógico son muestreadas ambas en los mismos intervalos T para generar la sucesión de entrada u kT y la sucesión de salida y kT respectivamente. Es claro que necesitamos especificar qué significa "funciona de manera similar". En este caso, elegiremos como nuestra estrategia de diseño un método que aparee la sucesión de respuesta al impulso del diseño digital con una sucesión de muestreo, elegida en los instantes apropiados T de la respuesta al impulso de un "prototipo" analógico. Elegiremos como prototipo uno de los filtros de Butterworth ya vistos.

Seleccionamos como nuestro prototipo el filtro de primer orden con frecuencia de corte ωc. El primer paso es calcular la respuesta al impulso de este filtro. La función de transferencia de Laplace del filtro es

$$G(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Así, la respuesta al impulso se obtiene como

$$h(t) = \omega_c e^{-\omega_c T} \quad (t \geq 0) \qquad \textbf{(3)}$$

Después, hacemos el muestreo de esta respuesta a intervalos T para generar la sucesión

$$\{h(kT)\} = \{\omega_c e^{-\omega_c T}\}$$

La cual, aplicando la transformada Z, da

$$£\{h(kT)\} = H(z) = \omega_c \frac{z}{z - e^{-\omega_c T}}$$

Finalmente, elegimos H(z) como la función de transferencia de nuestro sistema digital. Esto significa simplemente que la relación entrada-salida para el diseño del sistema digital será

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

Donde Y(z) y U(z) son las transformadas z de las sucesiones de entradas y salida {y(kT)} y {u(kT)} respectivamente. Así, tenemos

$$Y(z) = \omega_c \frac{z}{z - e^{-\omega_c T}} U(z) \qquad \textbf{(4)}$$

Ahora está definido nuestro sistema digital y podemos construir fácilmente el modelo de ecuación en diferencias para el sistema como

$$(z - e^{-\omega_c T})Y(z) = \omega_c \mathrm{zU(z)}$$

Esto es

$$zY(z) - e^{-\omega_c T}\, Y(z) = \omega_c \mathrm{zU(z)}$$

Bajo el supuesto de condiciones iniciales cero, podemos tomar las transformadas inversas para obtener el modelo de ecuación en diferencias de primer orden

$$y(k+1) - e^{-\omega_c T}\; y(k) = \omega_c \mathrm{u(k+1)} \qquad \textbf{(5)}$$

En la “Figura III” se muestra la elaboración de un diagrama de bloque de (5).

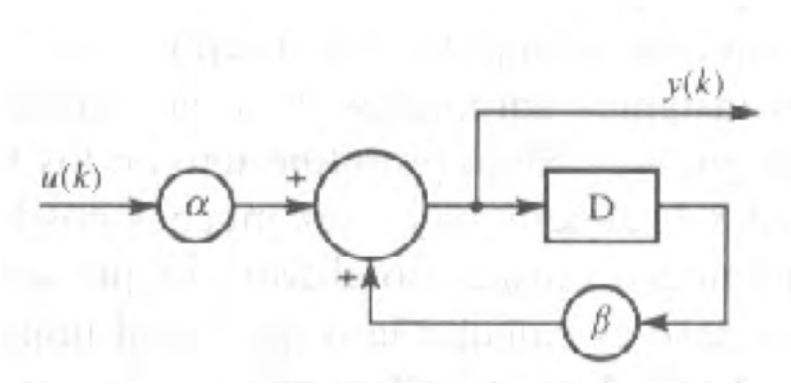


Diagrama de bloques para el filtro de reemplazo digital, $\omega = k\omega_{c,}\beta = e^{-\omega_c T}$

Conclusiones

Estos sistemas de tiempo discreto trabajan con señales que sólo pueden cambiar de valor en instantes de tiempo discretos. Cambian el espectro de señales de entrada, es decir, las componentes atenuantes de señales por una cantidad que depende de la frecuencia de la componente y mediante el uso de la Transformada Z diseñamos funciones de transferencia.

Referencias

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.
[2] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable
Compleja”. 2er. Cuatrimestre 2013, pp. 100.
[3] Phillips & Nagle “Digital Control Systems”
[4] Astrom & Wittenmark “Sistemas Controlados por Computador”