Transformada de Laplace aplicada al análisis de circuitos RLC

Burset Agustín

Estudiante de Ingeniería Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
agustin.brst@gmail.com

Agosto 2013

Resumen: La transformada de Laplace es muy útil para resolver ciertas ecuaciones diferenciales que surgen al analizar circuitos. En este documento se desarrolla su aplicación en la resolución de circuitos de tipo RLC. Se da un ejemplo para explicar el procedimiento.

Palabras clave: Laplace, RLC.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace tiene diversas aplicaciones. Una de las más importantes es que permite resolver ecuaciones diferenciales en forma sencilla. Básicamente, es una función que transforma una función de una variable *t* a una variable *s*.

Matemáticamente, la transformada de Laplace está definida de la siguiente forma:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1}$$

Cuando se aplica la transformada no es necesario calcular la integral, ya que existen tablas con propiedades y transformaciones que agilizan el proceso.

Analizaremos un circuito eléctrico simple, del tipo RLC, el cual está compuesto por tres elementos básicos: resistores (que tienen resistencia *R* medida en Ohms Ω), capacitores (que tienen capacitancia *C*, medida en faradios F) e inductores (que tienen inductancia *L*, medida en Henrys H), con las variables asociadas corriente *i(t)* (medida en amperes A) y voltaje *v(t)* (medido en volts V). Para el planteo de las ecuaciones que caracterizan a este tipo de circuitos se deben tener en cuenta las leyes de Kirchhoff, como así también las caídas de tensión en cada uno de los elementos que lo componen.

Leyes de Kirchoff:

- En cualquier nodo, la suma de la corriente que entra en ese nodo es igual a la suma de la corriente que sale. De igual forma, La suma algebraica de todas las corrientes que pasan por el nodo es igual a cero.

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + I_2 + I_3 ... + I_n = 0 \tag{2}$$

- En toda malla la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada. De forma equivalente, En toda malla la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico es igual a cero.

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = V_1 + V_2 + V_3 ... + V_n = 0 \quad (3)$$

Caídas de tensión en el circuito:

- Caída de tensión en una resistencia:

$$E_R = iR \quad (4)$$

- Caída de tensión en un capacitor:

$$E_C = \frac{q}{C} \quad (5)$$

- Caída de tensión en un inductor:

$$E_L = L\frac{di}{dt} \quad (6)$$

II. ANÁLISIS DE UN CIRCUITO RLC UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

El circuito RLC de la figura 1 está formado por un resistor *R*, un capacitor *C* y un inductor *L* conectados en serie a una fuente de voltaje *E(t)*. Antes de cerrar el interruptor en el tiempo *t=0*, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determinaremos la carga *q(t)* en el capacitor y la corriente resultante *i(t)* en el circuito en el tiempo *t* sabiendo que *R=160Ω, L=1H, C=10-4F* y *e(t)=20V.*

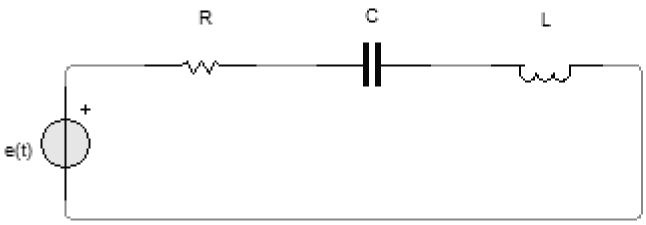

Figura 1 - Esquema del circuito

A partir de la segunda ley de Kirchoff (3) se plantea la siguiente ecuación

$$Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = e(\mathrm{t}) \quad (7)$$

Teniendo en cuenta que *i=dq/dt,*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(\mathrm{t}) \quad (8)$$

Reemplazando los valores dados para R, L, C y e(t) se obtiene

$$\frac{d^2q}{dt^2}+160\frac{dq}{dt}+10^4q=20 \tag{9}$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad nos queda,

$$s^2Q(\mathrm{s})-sq(0)-q'(0)+160\left[sQ(s)-q(0)\right]+10^4Q(s)=\frac{20}{s} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales del circuito ($q(0)=0, q'(0)=0$) se simplifica la ecuación

$$s^2Q(\mathrm{s})+160sQ(s)+10^4Q(s)=\frac{20}{s} \tag{11}$$

Se procede a despejar *Q(s)*, para luego hacer un desarrollo en fracciones simples

$$Q(s)=\frac{1}{500}\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+80)+\frac{4}{3}(60)}{(s+80)^2+60^2}\right] \tag{12}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, y haciendo uso de la propiedad de translación, obtenemos la expresión que nos permite conocer la carga *q(t)* del capacitor, dada por:

$$q(t)=\frac{1}{500}\left[1-e^{-80t}\cos(60t)-\frac{4}{3}e^{-80t}sen(60t)\right] \tag{13}$$

Entonces, teniendo en cuenta nuevamente que *i(t)=dq/dt,* la corriente en el circuito será:

$$i(t)=\frac{1}{3}e^{-80t}sen(60t) \tag{14}$$

III. CONCLUSION

Se pudo observar como el uso de la transformada de Laplace permite resolver de manera más sencilla las ecuaciones diferenciales planteadas a partir de un circuito eléctrico (en este caso del tipo RLC), convirtiendolas a ecuaciones algebraicas en el plano *S*.

REFERENCIAS

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002, pp. 202-206.

[2] Serway Jewett, Physics for scientists and engineers, Thomson Brooks/Cole, 2004, pp. 1020-1023.