Aplicación de funciones de variable compleja y función Delta de Dirac en física moderna

Brian Reginald Dennehy

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
brdennehy@hotmail.com
Julio 2011

Resumen: El objetivo del presente informe consiste en mostrar brevemente el uso de espacios complejos (más generales, como los espacios de Hilbert) en la mecánica cuántica y física relativista, específicamente en función de onda, colapso de función de onda, y la importancia del significado físico en metrología. Es de esencial importancia hacer uso de variables complejas para el desarrollo de funciones de onda, y funciones impulsivas (o funciones generalizadas), específicamente la función Delta de Dirac, en el estudio del colapso de la función de onda.

Palabras clave: espacios de Hilbert, función de onda, colapso de función de onda, variable compleja, función impulsiva (función Delta de Dirac).

I. INTRODUCCIÓN

Será de suma utilidad dar algunas definiciones, enunciados y ecuaciones. Las demostraciones no se mostrarán debido al requerimiento de herramientas matemáticas avanzadas, cuya extensión desvían el objetivo del informe. Siempre se definirán o desarrollarán cálculos en espacios complejos más generales, llamados espacios de Hilbert (el espacio real y el plano complejo son subespacios de los espacios de Hilbert)

II. FUNCIÓN DE ONDA

A. Ecuación de Schrödinger (con notación braket de Dirac) [1]:

$$\hat{\mathbf{H}}\,|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}\,|\Psi(t)\rangle = \frac{\hat{\vec{\mathbf{p}}}^2}{2m}\,|\Psi(t)\rangle + V(\hat{\vec{\mathbf{r}}},t)\,|\Psi(t)\rangle$$

donde

- i: es la unidad imaginaria ;
- $\hbar$: es la constante de Planck normalizada *(h/2π)* ;
- $\hat{H}$: es el hamiltoniano, dependiente del tiempo en general, el observable corresponde a la energía total del sistema ;
- $\hat{\vec{\mathbf{r}}}$: es el observable posición ;
- $\hat{\vec{\mathbf{p}}}$: es el observable impulso.

La ecuación de Schrödinger también se conoce como *ecuación de evolución de función de onda*, y la expresaremos como:

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi \tag{1}$$

Justamente, esta ecuación describe la evolución de una función de onda dada Ψ a lo largo del parámetro tiempo. Físicamente, esto significa que existe una función estable de todos los valores posibles que se pueden obtener en una medición (que son infinitos), aunque cuando se realiza la medición, se dice que dicha función colapsa pues un valor (el obtenido) interfiere con todos los otros valores, y los "anula". Es decir, una posibilidad se superpone a las demás, y las interfiere.

Resulta interesante destacar que la mecánica cuántica y la relatividad especial están sumamente relacionadas en cuanto a mediciones físicas.

B. Medidas estándares

La metrología requiere métodos delicados de comparación, y estándares a los cuales comparar [2]. Los estándares son esencialmente arbitrarios. La medida estándar de la frecuencia (tiempo) una de las más fundamentales en física, es definida como una transición entre niveles subatómicos en el átomo de Cesio 133 en su estado base. Así las medidas de longitudes son obtenidas a través de los tiempos de viaje de ondas electromagnéticas, cuyo estándar se obtiene de la velocidad de la luz.

Actualmente en la práctica de medición se utilizan otras cantidades relacionadas con frecuencia o tiempo a través de otras constantes convencionales.

Efecto Josephson: Sea una interacción en un par de electrones, entonces $\hbar\omega = eV$, donde e es la carga electrónica elemental, ω la frecuencia de la señal eléctrica relacionada con el potencial V.

C. La ecuación de evolución temporal de una función de onda en mecánica cuántica

Entonces, el estándar de frecuencia se define a partir de una señal eléctrica que estimula interacciones subatómicas en el átomo de Cesio 133. Esta frecuencia corresponde a la diferencia de eigenenergías de los dos niveles que satisfacen las ecuaciones de autovalores:

$$\begin{cases} E_1\psi_1 = H\psi_1 \\ E_2\psi_2 = H\psi_2 \end{cases},$$

Que se obtienen de la ecuación dependiente del tiempo de funciones de onda:

$$\Psi_{1,2} = \psi_{1,2} \exp\left(\frac{-iE_{1,2}.t}{\hbar}\right) \tag{2}$$

Normalmente se establece que la ecuación (2) debe tener la forma de una ecuación diferencial de primer orden debido al postulado que dice que una función de onda debe contener toda la información sobre el estado del sistema.

Ahora bien, sea el voltaje V, una función del tiempo. Entonces V tiene la forma $V_0 e^{-i\omega t}$, y satisface la ecuación $i\frac{dV}{dt} = \omega V$, y si además introducimos la relación $\omega = \frac{E}{\hbar}$, entonces tenemos que $i\hbar\frac{dV}{dt} = EV$. Entonces sean para dos estados distintos las energías E_1 y E_2 con $E_2 - E_1 = \hbar\omega$, y sean una serie de energías dadas con sus correspondientes funciones de onda, tendremos entonces la ecuación (1), donde H es el operador cuyos autovalores son las energías dadas.

D. Aplicación de la función impulsiva en la función de onda

- **Función Delta de Kronecker y su relación con la función delta de Dirac:**

Sea $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$, donde δ_{nm} se denomina delta de Kronecker y se define como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow i = j \\ 0 \Leftrightarrow i \neq j \end{cases}$$

Bajo ciertas condiciones, la función Delta de Kronecker puede surgir de una conjunción de la función Delta de Dirac. Por ejemplo, si un Delta de Dirac ocurre justo en un punto de conjunción y es acotado, entonces por el teorema de Nyquist–Shannon, la señal de tiempo discreta resultante será un Delta de Kronecker.

Y además sea $\psi = \sum c_n \phi_n$, donde $c_n = \langle \phi_n | \psi \rangle$ (notación braket). Aparece naturalmente, entonces, un sistema de funciones de onda ortonormales como autofunciones del Hamiltoniano, que miden los niveles de energía, llamados autovalores. Dichos autovalores se denominan "espectro" del Hamiltoniano.

Si los autovalores son contínuos (espectro contínuo), y si además reemplazamos los espacios complejos de Hilbert por espacios de distribuciones de Hilbert, tenemos que $\phi_y(x) = \delta(x - y)$, donde $\delta(x - y)$ es una función Delta de Dirac. Tenemos entonces, todo un conjunto de valores ϕ_y de distribuciones; y sea la imagen de dicho conjunto, Ω:

Entonces se cumple que $\psi(x) = \int_{\Omega} c(y)\phi_y(x)dy$

Y es una distribución (en donde se puede observar las propiedades de una función Delta de Dirac), pues $c(y) = \langle \psi, \phi_y \rangle$.

Esta formulación ha derivado en la formulación moderna de una función de onda (o formulación de Von Neumann). El conjunto de estos estados cuánticos propios del operador momento son llamados en física "base de espacio-k". Por la relación de conmutación entre los operadores posición y momento, las funciones de onda en espacio-r y en espacio-k son pares de transformadas de Fourier.
Así, la formulación de Von Neumann establece la ecuación de función de onda como:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} \psi(x) e^{\frac{-2\pi i p x}{h}} dx \qquad [4]$$

III. COLAPSO DE LA FUNCIÓN DE ONDA

En algún tiempo dado, el estado cuántico (función de onda) de una partícula dada puede expresarse como:

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle \psi_i$$

Donde cada $|i\rangle$ implica una posibilidad diferente (dichas posibilidades implican que $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$.
Podemos ver que cada término de la sumatoria es un número complejo, y cuyo módulo cuadrado representa la densidad de probabilidad. Esto significa que cuando se realiza una medición (una observación), asignamos sólo *un* término de la sumatoria al estado de ψ (como si todos los demás se anularan). Esto sucede porque al obtener una medición agregamos información al sistema, lo cual resulta paradójico pues habíamos dotado con *toda* la información que había al sistema (todas las posibilidades). Por eso se dice que la función de onda colapsa al realiza runa medición (porque de todos los valores posibles, la solución se reduce a uno solo). El significado físico del colapso de función de onda implica que: "el simple acto de observar, altera el resultado de medición", es decir que el observador altera la realidad (sistema). Esta paradoja ha sido debatida desde la *Interpretación de Copenhague*, e incluso hoy sigue siendo duramente debatida porque establece que no se puede obtener un medición que represente el valor *real*, por más objetivo que sea el proceso de medición.

CONCLUSIÓN

Es interesante destacar cómo el uso correcto de variables complejas ha permitido el estudio de situaciones físicas (hipotéticas y reales). Es notable también el desarrollo histórico de la teoría de distribuciones, sin el cual no habría sido posible estudiar el estado cuántico al que se somete una partícula tras un incremento (cuantizado) instantáneo de energía.
Así como el estudio de las aplicaciones del electromagnetismo posibilitaron los avances tecnológicos de hoy en día, actualmente se encuentra en estado de investigación las posibles aplicaciones de la mecánica cuántica en campos tan diferentes como la computación de avanzada y la psiconeurología, y será necesaria la comprensión de los espacios complejos para desarrollar aún más el conocimiento de dichos campos.

REFERENCIAS

[1] Formulación de Von Neumann de la ecuación de Schrödinger, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_de_Schr%C3%B6dinger#Formulaci.C3.B3n_moderna_de_la_ecuaci.C3.B3n
[2] Alan Cook, "Lectures on the basis of Physics", en International Centre for Theoretical Physics, 1990, Miramare – Triestre
[3] Colapso de Función de Onda, disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Wave_function_collapse
[4] Función de Onda, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_onda
[5] A. Pais, "Einstein and the quantum Theory", en Rockefeller University, New York, 1979, American Physical Society
[6] "The Physical Review", Second Series, Vol. 115, No.3, Agosto 1, 1959, pp. 485-490
[7] Diego Harari y Diego Mazzitelli, "100 años de Relatividad", Colección Ciencia Joven, Eudeba, 2007