Transformada de Laplace
Respuesta de Frecuencia

Brian E. Magario
Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
brian.magario@gmail.com
Agosto 2011

Resumen: se hará una breve explicación sobre la utilización de la Transformada de Laplace con respecto a la Respuesta de Frecuencia de un sistema, que tiene que ver con la función de transferencia de dicho sistema, en el cual a partir de una entrada específica obtenemos su respectiva respuesta de salida.

Palabras clave: frecuencia, Transformada de Laplace, función de Transferencia.

I. INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar con el tema específico de este trabajo, es importante definir la Transformada de Laplace de una función $f(t)$; que resulta ser:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

donde s es una variable compleja y e^{-st} es llamado el **núcleo** de la transformación.
Sabemos que es una herramienta importante para el análisis del comportamiento de un sistema en el domino de la frecuencia.
Luego, la respuesta de frecuencia, se refiere a la respuesta en estado estable de un sistema sujeto a una señal senoidal de amplitud fija, pero con una frecuencia que varía con cierto rango.

II. DESARROLLO

Comenzaremos describiendo la función de transferencia, útil para este trabajo: La función de transferencia se define como la relación que hay entre la Transformada de Laplace de la salida del sistema con respecto a la Transformada de Laplace de la entrada.

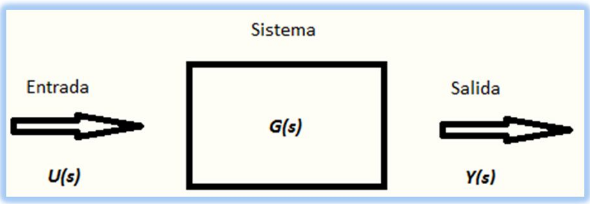

Figura 1: Diagrama de bloque de la función de Transferencia

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo, representado por la siguiente ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_0 u \qquad (1)$$

Donde $n \geq m$, las a y las b son coeficientes constantes, $y(t)$ es la respuesta del sistema o salida, que corresponde a la entrada $u(t)$ aplicada en el tiempo $t = 0$ .Luego aplicando la Transformada de Laplace término a término:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right)Y(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right)U(s) \tag{2}$$

Así, la función de transferencia del sistema se define como:

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{3}$$

Y el sistema puede representarse en diagramas de bloque como se puede observar en la **figura 1**.

A. *Respuesta de Frecuencia*

Podemos obtener la respuesta de frecuencia de la función de transferencia, mediante el uso del siguiente cambio de variables $s = j\omega$.

Consideremos la **figura 1**; con una función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}; (m \leq n) \tag{4}$$

Cuando la entrada es una señal senoidal: $u(t) = Asen(\omega t)$, aplicada en el tiempo $t = 0$, la respuesta del sistema $y(t)$ para $t \geq 0$ está determinada por:

$$Y(s) = G(s)L\{Asen(\omega t)\} = G(s)\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{5}$$

de (4) y (5)

$$Y(s) = \frac{KA\omega(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)(s - j\omega)(s + j\omega)} \tag{6}$$

Que, expandiendo en fracciones parciales, da:

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{(s - j\omega)} + \frac{\alpha_2}{(s + j\omega)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{(s - p_i)} \quad \text{para } t \geq 0 \tag{7}$$

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace, se obtiene:

$$y(t) = \alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_2 e^{-j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e^{pit} \quad \text{para } t \geq 0 \tag{8}$$

En general en la práctica, los términos $\beta_i e^{pit}$ tienden a cero conforme *t* crece y no contribuirán a la respuesta en estado estacionario $y_{ee}(t)$ del sistema.

Luego de un análisis matemático para determinar los distintos α y expresando a $G(j\omega)$ de forma polar; llegamos a:

$$y_{ee}(t) = \frac{A}{2j}|G(j\omega)| sen[\omega t + \arg G(j\omega)] \tag{9}$$

Esto indica que si un sistema lineal estable con función de transferencia $G(s)$ está sujeto a una entrada senoidal, entonces:

a) La respuesta en estado estacionario también es una senoidal con la misma frecuencia ω de entrada;

b) La amplitud de esta respuesta es $|G(j\omega)|$ veces la amplitud A de la entrada senoidal: se dice que la entrada está **amplificada** si $|G(j\omega)| > 1$ y **atenuada** si $|G(j\omega) < 1|$;

c) El corrimiento de fase (diferencia de fase) entre la entrada y la salida es $\arg G(j\omega)$. Se dice que el sistema se **adelanta** si $\arg G(j\omega) > 0$ y que se **atrasa** si $\arg G(j\omega) < 0$.

B. *Procedimiento analítico para determinar la Respuesta de Frecuencia*:

1. Se obtienen las funciones de transferencia para el elemento o combinación de elementos que haya, es decir $G(s) = Y(s)/U(s)$ dónde $Y(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de la respuesta y la señal, respectivamente. Todas las condiciones iniciales se desprecian porque estas no afectan la respuesta en el estado estable.
2. En la función de transferencia, se sustituye cada s por jω.
3. Para varios valores de la frecuencia ω, se determina la relación de magnitud $|G(j\omega)|$ y el ángulo de fase $\arg G(j\omega)$.
4. Se grafican los resultados en coordenadas rectangulares

C. *Ejemplo de aplicación*

A continuación un simple ejemplo de una función de Respuesta en Frecuencia.

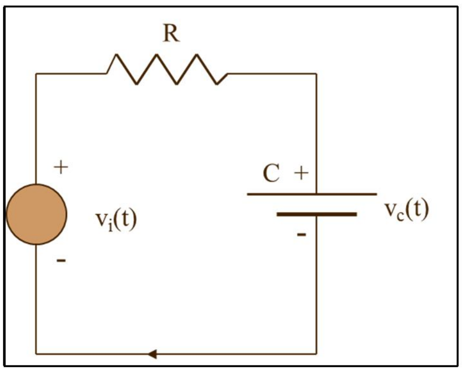

Figura 2: Circuito RC

La función de transferencia del sistema será entonces:

$$G(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{RC} \text{ y evaluando } G(s) \text{ en } s = j\omega\text{, tenemos que:}$$

$$G(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} = |G(j\omega)|. \ \angle G(j\omega)$$

Donde:

$$|G(j\omega)| = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} \text{ y } \angle G(j\omega) = -arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Con su respectivo Diagrama de Bode:

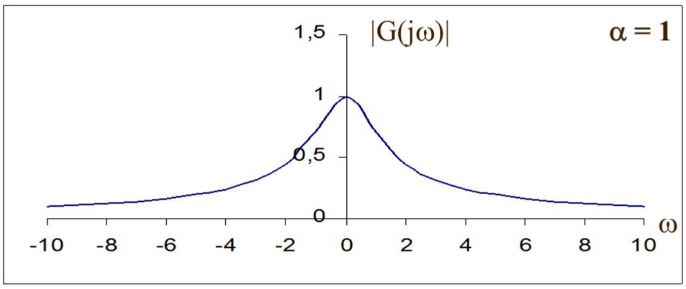

Figura 3: gráfica del módulo de la función de Transferencia en función de la frecuencia.

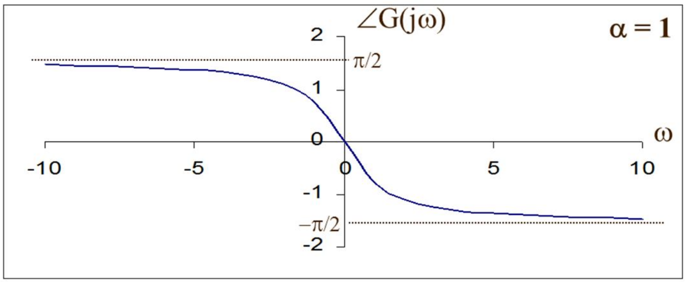

Figura 4: gráfica de la fase de la función de Transferencia en función de la frecuencia.

III. CONCLUSIONES

Es sabido que mediante la aplicación de la Transformada de Laplace, se pueden resolver diferentes tipos de problemas físicos y electrónicos; por este motivo el análisis de la respuesta de frecuencia es muy útil; como se puede observar en el ejemplo, para la aplicación de circuitos eléctricos (en esta ocasión circuito RC); así como seguramente habrá una gran diversidad para la aplicación de la Respuesta de Frecuencia en las áreas anteriormente mencionadas.

REFERENCIAS

[1] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Pearson Educación, segunda edición 2002, pp.177-178-203-205

[2] *UCV. Caracas - Venezuela* [internet], disponible en neutron.ing.ucv.ve/electronica/materias/c2507/**ASL10**.ppt