# Función Delta de Dirac, Convolución y Transformada de Fourier
# Aplicación: Procesamiento Sísmico de Reflexión


Braian Damián Vaylet

*Estudiante de Ingeniería Electricista/Electrónica*
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*braianvaylet@gmail.com*


Agosto 2013


*Resumen*: El siguiente trabajo muestra de forma escrita una de las aplicaciones de la función impulsiva o Delta de Dirac, junto con la Convolución y la transformada de Fourier en el procesamiento sísmico de reflexión. Dado que este procesamiento es largo e involucra otras herramientas y conocimientos fuera de nuestro alcance, nos concentraremos en los temas que nos conciernen nombrados al comienzo.



*Palabras clave*: convolución, función delta, Transformada de Fourier.


## I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Fourier tiene muchas aplicaciones, especialmente para la caracterización frecuencial de señales y sistemas lineales, es decir, conocer las características frecuenciales de las señales y el comportamiento de los sistemas lineales ante estas señales. Mientras que la función Delta de Dirac (impulso) es una función infinitamente angosta, infinitamente alta, cuya integral tiene un valor unitario, esta función vale infinito en el cero y es nula en el resto de los puntos. Por último una convolución es un operador matemático que transforma dos funciones *f* y *g* en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen *f* y una versión trasladada e invertida de *g*, cuya notación es ( *f* **g*).

## II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

Un frente de onda sísmico producido por una fuente impulsiva es inicialmente un pulso de gran amplitud que contiene un gran espectro de frecuencias en ese pico instantáneo. Puede describirse mediante la función Delta de Dirac, ecuación (1),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial(x-a).f(x).dx = f(a) \quad \left[ e.g \int_{-\infty}^{+\infty} \partial(x).dx = 1 \right] \tag{1}$$

Luego del disparo, a medida que el frente de onda avanza, disminuye su amplitud y pierde frecuencias altas estirándose según la forma de una ondicula de fase mínima, como se ve en la imagen (1),

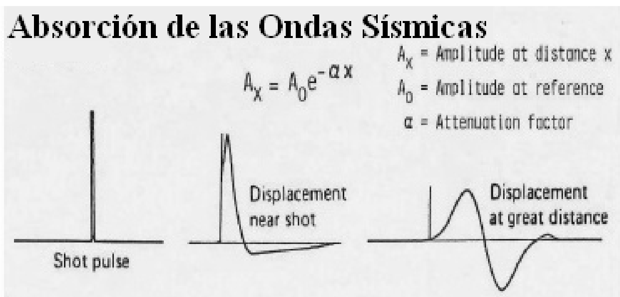
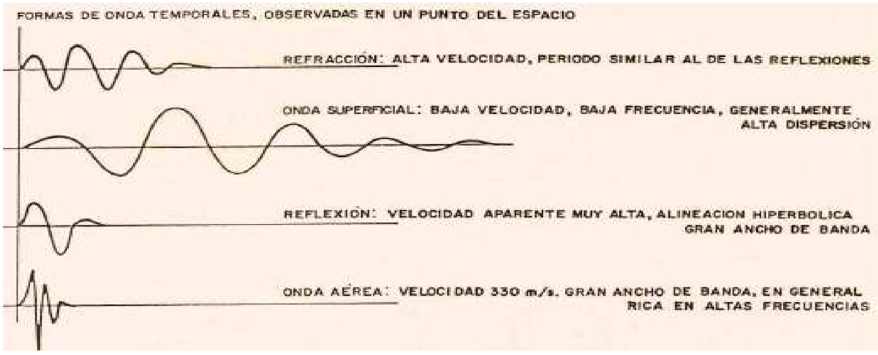



**Imagen 1**

En la imagen (2), se ven algunas formas de onda típicas que pueden ser registradas, todas ellas resultantes de la mutación de la delta de Dirac. Cada traza sísmica es esencialmente una serie de valores de amplitud a lo largo del tiempo (de ida y vuelta). Representando el resultado del arribo de señales, esto es, sucesivas respuestas reflectivas provenientes de interfaces de muy variada magnitud (desde límites formacionales hasta laminación sedimentaria, cuanto mayor sea su amplitud mayor sera el contraste de impedancias acústicas) que a la vez son interferidas por ruidos, ya sean superficiales o profundos,




**Imágen 2**

Las señales sísmicas resultan de la convolución del frente de onda generado en la fuente, con los sucesivos coeficientes de reflexión correspondientes a interfaces en el subsuelo. Donde la convolución es el proceso mediante el cual la forma de onda (ondicula) se modifica al reflejarse, modificación proporcional a la magnitud y signo del coeficiente de reflexión. Además la amplitud reflejada es directamente proporcional al módulo de dicho coeficiente. De modo que, la señal que llega trae la información de los contrastes de impedancia acústica del subsuelo. En nuestro caso, la convulución será entre la *G(t)* (ondícula) y la *F(t)* (serie de coeficientes de reflexión) obteniendo una tercera función *S(t)* (la señal registrada). La expresión formal se lee en la imagen (3) que indica que la convolución es la integral de una serie de productos donde la función *G(t)* se va desplazando temporalmente respecto a la función *F(t)*, a través del proceso de convolución, para dar finalmente la función *S(t).*

Sin embargo, el patrón de interferencia resultante en la traza en este caso idealizado sólo resulta de los coeficientes de reflexión, mientras que en la vida real resulta afectada por varios tipos de ruidos superficiales y profundos,

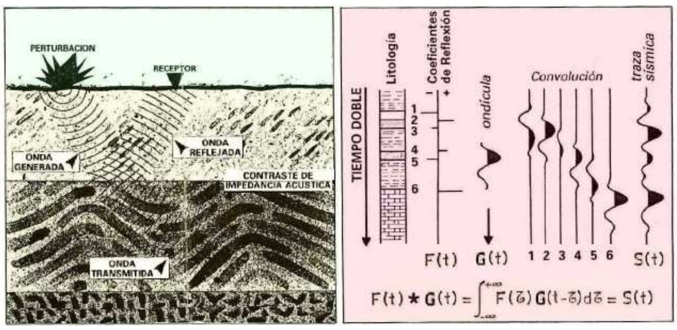



**Imagen 3**

Además de la interferencias que producen los ruidos y la propia señal, el registro convolucional de las reflexiones siempre es significativamente afectado por pérdidas de amplitud y de frecuencia.

La imagen (4) a la izquierda, muestra los principales factores que afectan la amplitud de las ondas sísmicas en su tránsito por el subsuelo,

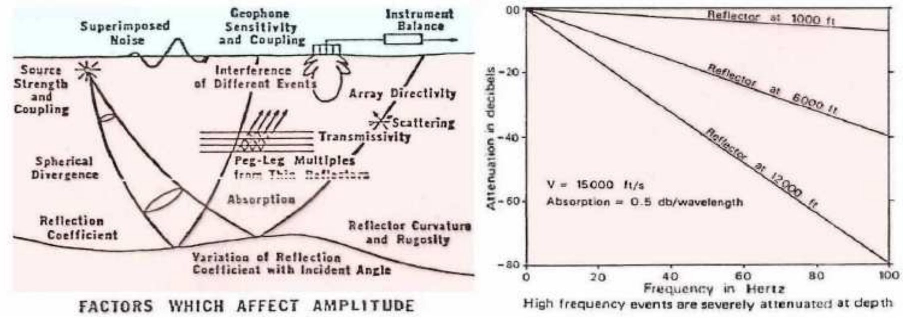


Imagen 4

A la derecha de la imagen (4), se ilustra la atenuación de las frecuencias sísmicas, tanto mayores cuantos más altos son sus valores y cuanto más distancia ha debido viajar la onda por el subsuelo.

Vemos ahora un esquema de los principales ruidos de origen profundo. La mayoría consisten en reflexiones múltiples, es decir eventos entretenidos por ciertas interfaces del subsuelo, que por lo tanto llegan más tarde a los receptores, superponiéndose en los registros de campo con señales procedentes de lugares más profundos, como se ve abajo.

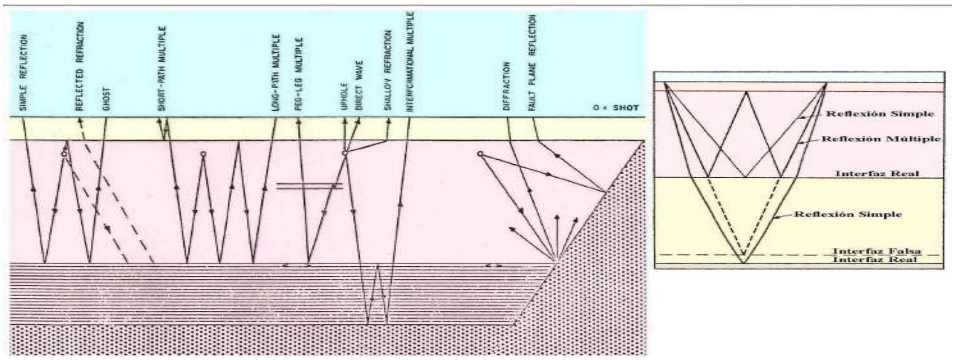



Imagen 5

Una vez obtenidos los registros de campo, sigue la tarea de procesarlos digitalmente, mediante programas específicos en computadoras. Un instrumento matemático fundamental para este fin es la Transformada de Fourier que permite pasar del dominio del tiempo (la traza, o sea una serie de valores de amplitud a lo largo del tiempo) al dominio de la frecuencia (el espectro de frecuencia donde vemos en ordenadas las amplitudes de señal y ruido, correspondientes a cada frecuencia registrada con su escala desplegada en abscisas). La transformación se realiza aproximando la forma de la traza con una integración de una serie de funciones armónicas (seno, coseno) o Serie de Fourier, de amplitudes variables, para poder entonces pasar al cálculo y representación del espectro de frecuencia,

Funcion de tiempo, $$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\cos(2\pi.f.t).df + i\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)sen(2\pi.f.t).df \quad (2)$$

Funcion de frecuencia, $$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\cos(2\pi.f.t).dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)sen(2\pi.f.t).dt \quad (3)$$

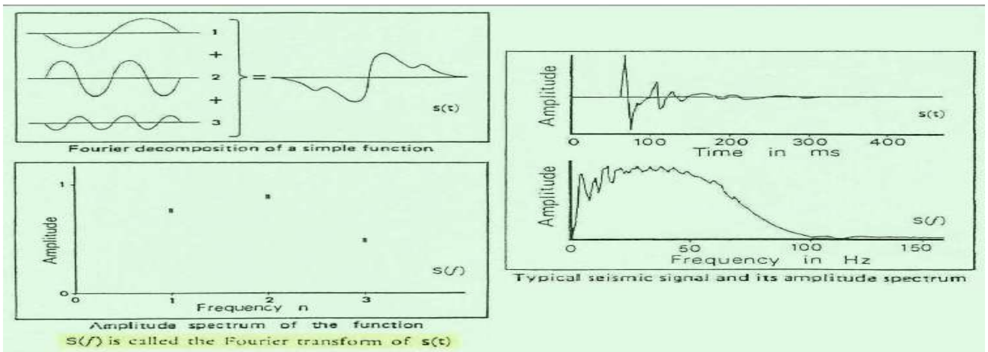



**Imagen 6**

Arriba puede verse cómo un fragmento de traza sísmica en el dominio del tiempo, *S(t)*, puede pensarse como la suma de funciones armónicas (en este caso sólo tres, en casos reales muchísimas) mediante la aplicación de una Serie de Fourier, al transformarla puede ser luego representada en el dominio de la frecuencia *S(f)* según un espectro de amplitudes vs frecuencias. También se visualiza un ejemplo de traza sísmica típica en función de sus tiempos de arribo y de sus frecuencias integrantes. Por ultimo la imagen (7) muestra la representación en uno y otro dominio de una frecuencia simple, un impulso unitario (fuente), un ruido blanco (llamado así porque contiene todas las frecuencias), un ruido blanco sísmico ideal (con todas las frecuencias en amplitud pareja dentro del rango sísmico) y una traza sísmica (conteniendo señal y ruido).A la izquierda de los gráficos se muestra un caso real de traza (en amarillo) y las armónicas que se obtienen en su descomposición.

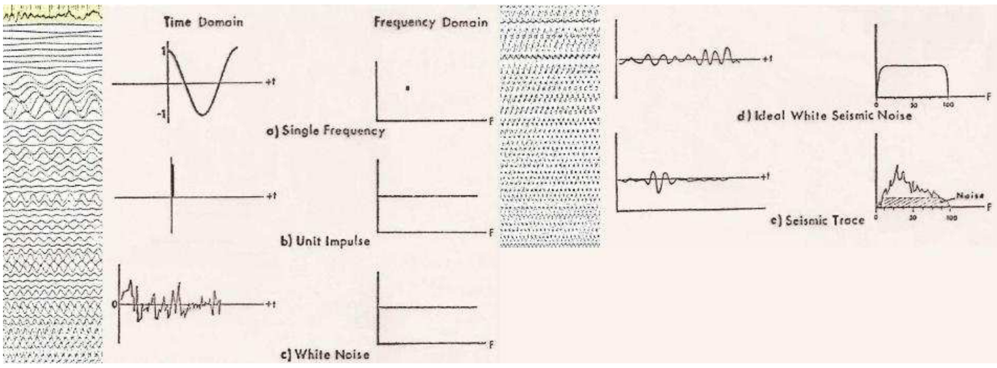



**Imagen 7**

A partir de aca comienza la tarea de procesar los datos utilizando programas por computadoras para tales fines, pero no se continuará ya que se escapa del tema que nos interesa.

## III. CONCLUSIÓN

Como conclución al trabajo podemos ver que los conceptos aprendidos en la materia de Funciones de Variables complejas poseen mas usos de los que creiamos, ya que tienen muchas utilidades en otras ciensias y carreras ademas de las ingenierias que conformaban el curso, en este caso vimos como se usaron para el procesamiento de ondas sismicas en el area de la geologia, trabajando las ondas utilizando las series y transformadas de fourier.

## IV. REFERENCIAS


1) Glyn James, Matemáticas avanzadas para ingeniería, Pearson Educación, 2002
2) Procesamiento sismico de reflexion - http://es.scribd.com/doc/29705455/Procesamiento-Sismico-de-Reflexion
3) Prof. Guillermo Calandrini, Guia de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variale Compleja.