Circuitos eléctricos paralelos RLC en Corriente Alterna

Betelu Gonzalo

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
betelugonzalo@gmail.com
Septiembre 2011

Resumen: En este informe se estudiará una aplicación sobre uno de los temas de la materia Funciones de Variable Compleja. Dicho tema es ¨Transformada de Laplace¨ y veremos como es usada cuando se quieren resolver circuitos del estilo RLC en paralelo.

Palabras clave: Circuitos RCL, Laplace, corriente alterna.

I. INTRODUCCIÓN

El análisis de la corriente alterna (CA) es una rama de la electrónica que permite el análisis del funcionamiento de los circuitos RLC paralelos que están compuestos de resistencias, condensadores e inductores con una fuente de corriente alterna, en cuanto a su análisis nos daremos cuenta que tendremos que operar con números complejos y con ecuaciones diferenciales donde se usará la transformada de Laplace para luego poder resolver dicho circuito.

Resulta importante, antes de adentrarse en la resolución del circuito RLC en paralelo que se encuentra en la sección IV, dar algunas definiciones y enunciar algunas propiedades, con el objetivo de facilitar la comprensión de conceptos, que serán mencionados en los apartados II y III.

II. EXPLICACIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL CIRCUITO RLC

Un circuito RLC es un circuito en el que solo hay resistencias, bobinas y condensadores, estos tres elementos tienen, por ecuaciones características una relación lineal entre tensión e intensidad. Ahora se detallara estos tres elementos que componen el circuito.

A. Resistencia

En corriente alterna la oposición al paso de la corriente eléctrica tiene dos componentes, una real y otra imaginaria. Dicha oposición ya no se llama resistencia sino impedancia Z *(*La impedancia es una magnitud que establece la relación (cociente) entre la tensión y la intensidad de corriente). La impedancia se expresa mediante un número complejo, por ejemplo de la forma $a + jb$, siendo a la parte real del número complejo y b su parte imaginaria. Pues bien, una resistencia presenta una impedancia que sólo tiene componente real, ya que la su componente imaginaria es de valor cero. Tendremos entonces que en el caso que nos ocupa la impedancia total del circuito será igual al valor que presente la resistencia R, ya que no existe ningún otro elemento en el circuito. Así pues:

$$Z = R + j0$$

Una resistencia ideal es un elemento pasivo que disipa energía en forma de calor según la ley de Joule. También establece una relación de proporcionalidad entre la intensidad de corriente que la atraviesa y la tensión medible entre sus extremos, relación conocida como ley de Ohm (establece que la intensidad que circula por un conductor, circuito o resistencia, es inversamente proporcional a la resistencia (*R*) y directamente proporcional a la tensión (*E*)):

$$u(t) = i(t)\, R$$

Donde $i(t)$ es la corriente eléctrica que atraviesa la resistencia de valor R y $u(t)$ es la diferencia de potencial que se origina. En general, una resistencia real podrá tener diferente comportamiento en función del tipo de corriente que circule por ella.

B. Condensador

El condensador presentará una oposición al paso de la corriente alterna. Dicha oposición se llama reactancia capacitiva. ¿Cuál es la naturaleza de la reactancia capacitiva? Este tipo de oposición al paso de la corriente eléctrica es de carácter reactivo, entendiendo tal cosa como una "reacción" que introduce el condensador cuando la tensión que se le aplica tiende a variar lentamente o nada. Cuando el condensador está totalmente descargado se comporta como un cortocircuito. Cuando está totalmente cargado como una resistencia de valor infinito. Para valores intermedios de carga se comportará como una resistencia de valor intermedio, limitando la corriente a un determinado valor. Como en corriente alterna el condensador está continuamente cargándose y descargándose, mientras más lentamente varíe la tensión (frecuencia baja) más tiempo estará el condensador en estado de casi carga que en estado de casi descarga, con lo que presentará de media una oposición alta al paso de la corriente. Para variaciones rápidas de la tensión (frecuencias altas) el efecto será el contrario y por tanto presentará una oposición baja al paso de la corriente. Podemos decir, por tanto, que la naturaleza de este tipo de oposición es de carácter electrostático: la carga almacenada en el condensador se opone a que éste siga cargándose y esta oposición será mayor cuanto más carga acumule el condensador.

El circuito presentará una impedancia al paso de la corriente alterna dada por:

$$Z = 0 - j\, X_c$$

El condensador ideal puede definirse a partir de la siguiente ecuación diferencial:

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

donde C es la capacidad, $u(t)$ es la función diferencia de potencial aplicada a sus terminales e $i(t)$ la corriente resultante que circula.

Comportamiento en corriente alterna:

En CA, un condensador ideal ofrece una resistencia al paso de la corriente que recibe el nombre de reactancia capacitiva, X_C, cuyo valor viene dado por la inversa del producto de la pulsación (ω) por la capacidad, C:

$$X_C = \frac{1}{jwC}$$

C. Bobina

La bobina presentará oposición al paso de la corriente eléctrica y ésta será reactiva, de manera similar al caso capacitivo. Sin embargo, la naturaleza de la reactancia inductiva no es de carácter electrostático, sino de carácter electromagnético. Una bobina inducirá en sus extremos (debido a su autoinducción) una tensión que se opondrá a la tensión que se le aplique, al menos durante unos instantes. Ello provoca que no pueda circular corriente libremente. Cuanto mayor sea la velocidad de variación de la tensión aplicada mayor valor tendrá la tensión inducida en la bobina y, consecuentemente, menor corriente podrá circular por ella. Así, a mayor frecuencia de la tensión aplicada mayor será la reactancia de la bobina y, a la inversa, a menor frecuencia de la tensión aplicada menor será la reactancia de la bobina. La impedancia que presenta la bobina, y por ende el circuito, será la siguiente:

$$Z = 0 \ + jX_L$$

Comportamiento en corriente alterna:

En corriente alterna, una bobina ideal ofrece una resistencia al paso de la corriente eléctrica que recibe el nombre de **reactancia inductiva**, $\boldsymbol{X_L}$, cuyo valor viene dado por el producto de la pulsación (ω=2fπ) por la inductancia, L:

$$X_L = L\omega$$

Si la pulsación está en radianes por segundo (rad/s) y la inductancia en henrios (H) la reactancia resultará en ohmios.

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

III. INTRODUCCIÓN A LA RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS RLC PARALELOS

Para conocer el funcionamiento de un circuito deberíamos, aplicar las leyes de Kirchhoff,

A. La ley de corrientes de Kirchhoff

En cualquier nodo, la suma de la corriente que entra en ese nodo es igual a la suma de la corriente que sale. De igual forma, La suma algebraica de todas las corrientes que pasan por el nodo es igual a cero

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + I_2 + I_3 \ldots + I_n = 0$$

Luego deberíamos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, para determinar la tensión e intensidad en cada una de las ramas. Como este proceso se hace extremadamente laborioso a partir de que en un circuito halla más de dos bobinas o condensadores (estaríamos frente a ecuaciones diferenciales de más de segundo orden), lo que se hace en la práctica es escribir las ecuaciones del circuito y después simplificarlas a través de la Transformada de Laplace, en la que derivadas e integrales son sumas y restas con números complejos, se le suele llamar dominio complejo,

B. La transformada de Laplace

Una función $f(t)$ definida para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función $F(s)$, definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

siempre y cuando la integral esté definida. Cuando $f(t)$ no es una función, sino una distribución con una singularidad en 0, la definición es

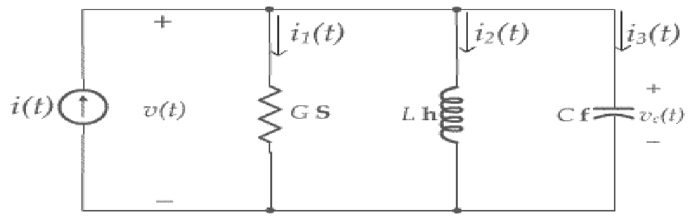

Figura 1: Circuito RLC en paralelo

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Para después resolver un sistema de ecuaciones lineales complejo y luego aplicarle la Anti transformada de Laplace, y finalmente, devolverlo al dominio del tiempo.

IV. SOLUCIÓN DEL CIRCUITO RLC PARALELOS DE CORRIENTE ALTERNA

La fuente de corriente *i (t)* de la figura 1, es la que excita el circuito con corriente alterna. El inductor lleva una corriente inicial $i_2(0^+)$. En la misma dirección de $i_2(t)$. El voltaje inicial del condensador es $v_c(0^+)$ con la polaridad opuesta al sentido de la corriente $i_3(t)$

Por la ley De Kirchhoff sabemos que

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = i\,(t) \tag{1}$$

Hallamos el equivalente de cada una de estas corrientes, visto en la sección II
Para el caso de la resistencia es:

$$i_1(t) = R\,v(t) \tag{2}$$

Para el inductor:

$$i_2(t) = \frac{1}{L}\int v(t) \tag{3}$$

Para el capacitor:

$$i_3(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{4}$$

Remplazamos estas (2), (3) y (4) en (1)

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int v(t) + Rv(t) = i\ (t) \tag{5}$$

Aplicamos la transformada de Laplace, y el resultado es:

$$I(s) = RV(s) + \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i_2(0^+)}{s} + sCV(s) - Cv(0^+) \tag{6}$$

Arreglamos esta ecuación, de tal forma que se pueda ver de forma más clara

$$V(s) = \left[\frac{1}{sC + R + \frac{1}{sL}}\right]\left[I(s) + Cv(0^+) - \frac{i_2(0^+)}{s}\right] \tag{7}$$

El primer factor de esta ecuación corresponde a la función del sistema, mientras que el segundo factor corresponde a la función de excitación $I(s) = L\{I\,\text{sen}(\omega t)\} = \frac{I\omega}{s^2+\omega^2}$, y las condiciones iniciales. De acuerdo a lo anterior, el primer factor es una impedancia que puede ser expresada de la siguiente forma:

$$Z(s) = \frac{1}{sC + R + \frac{1}{sL}} \tag{8}$$

O una admitancia cuyo valor es:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = sC + R + \frac{1}{sL} \tag{9}$$

Los polos de **Z(s)** o los ceros de **Y(s)**, determinan el comportamiento transitorio de la función respuesta **V(s)**. Antitransformando se obtiene en el dominio del tiempo la función respuesta a la excitación alterna:

$$v(t) = L^{-1}\{V(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{I(s) + Cv(0^+) - \frac{i_2(0^+)}{s}}{Y(s)}\right\} \tag{10}$$

V. Conclusión

En este artículo pudimos apreciar como el uso de la transformada de Laplace nos permite hacer más simple el encontrar una solución cuando se trata de trabajar con circuitos RLC en paralelo. Permitiéndonos comprender mucho mejor el comportamiento de este tipo de circuitos

Referencias

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*,Analisis de circuito de corriente alterna [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Análisis_de_circuitos_de_corriente_alterna#Circuito_serie_RLC, [Acceso el 29 de agosto de 2011].

[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, Inductor [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Inductor, [acceso el 29 de agosto de 2011].

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, Condensador [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Condensador_el%C3%A9ctrico, [acceso el 29 de agosto de 2011].

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, Resistor [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Resistor, [acceso el 29 de agosto de 2011].

[5] Terra, Circuitos RLC en corriente alterna, [Internet], disponible en http://www.terra.es/personal2/equipos2/rlc.htm , [acceso el 29 de agosto de 2011].

[6] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, Leyes de Kirchhoff [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kirchoff, [acceso el 29 de agosto de 2011].

[7] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, Leyes de Kirchhoff [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace, [acceso el 29 de agosto de 2011].

[8] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, Leyes de Kirchhoff [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Impedancia, [acceso el 29 de agosto de 2011].

[9] Transformed de Laplace [internet], disponible en http://eiceti.tripod.com/sitebuildercontent/sitebuilderfiles/laplace.pdf, [acceso el 29 de agosto de 2011].