Transformada de Laplace
Función de transferencia y aplicación

Bernardo A. Sanguinetti

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
berny.91@hotmail.com

Agosto 2011

Resumen: Este informe pretende destacar una de las principales aplicaciones de la Transformada de Laplace, la función de transferencia, en el contexto de la modelación y el control de procesos. Además de describir la forma y uso de las funciones de transferencia, se analizará un ejemplo real de su aplicación. Concretamente se describirá y analizará el sistema básico de un amortiguador vehicular.

Palabras clave: transformada de Laplace, función de transferencia, proceso, amortiguador.

I. Introducción

Un proceso puede verse como una parte de un sistema que, mediante una o más actividades, lleva a cabo una cierta función. El mismo puede valerse de información sobre el estado actual del sistema, la entrada, para actuar como se desea en distintas circunstancias y producir el resultado esperado en cada una de ellas, la salida.

El control de un proceso tiene que ver con esto último: la salida puede ser distinta para cada entrada y éste se encarga de que sea la correcta.

Existen infinidad de procesos controlados hoy en día, muchos de ellos presentes en la vida cotidiana. Algunos de lo más simple como un termostato, que controla una temperatura y en función de ella puede por ejemplo abrir o cerrar un circuito. Otros muy complejos, como los encargados de controlar la producción de una fábrica.

La importancia del control de procesos tiene como justificación el beneficio que conlleva, puede llevar a incrementar la productividad, reducir la mano de obra, mejorar la calidad y garantizar la seguridad, entre otros.

Como dependientes de la entrada, los mismos resultan en muchos casos, al modelar la realidad, en modelos dinámicos, es decir, cuyo comportamiento varía en el tiempo. Esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferenciales y es ahí donde la transformada de Laplace entra en juego.

Además de lo descripto en este documento, es necesario entender algunos conceptos de Física y Matemática para comprender íntegramente el mismo.

II. La función de transferencia

Una función de transferencia es un modelo matemático que representa el efecto de un proceso a través de un cociente que relaciona la respuesta del sistema a una señal de entrada, ambas modeladas.

Prácticamente se puede determinar mediante el cociente

$$G(s) = \frac{S(s)}{E(s)} \tag{1}$$

donde G (s) es la función de transferencia, S(s) es la transformada de Laplace de la salida y E(s) es la transformada de Laplace de la señal de entrada.

Como se sabe, la transformada de Laplace de una función en el espacio temporal pertenece al espacio de frecuencias. Luego la salida en frecuencia del sistema es

$$S(s) = G(s)E(s) \tag{2}$$

por lo que la salida en función del tiempo se halla anti-transformando S(s):

$$s(t) = L^{-1}[S(s)] \tag{3}$$

En muchos sistemas se puede encontrar la función de transferencia que lo describe, lo que facilita el análisis de la respuesta del sistema ante distintos patrones de entrada. Para una función de entrada dada, se transforma, se multiplica por la función de transferencia y se anti-transforma para llegar a la función de salida.

III. Aplicación: amortiguador

Consideremos un amortiguador básico consistente de un resorte de constante k y un cilindro-pistón con un líquido de constante b. El auto se representa con la masa m. Como sabemos el resorte ejerce una fuerza conservativa que depende de la deformación en k veces y es contraria a la misma, mientras que el líquido ejerce una fuerza disipativa contraria al movimiento que depende b veces de la velocidad.

En consecuencia, ante la acción de una fuerza externa interesa determinar el patrón de movimiento del resorte. Como es de prever, bajo un cambio en la fuerza aplicada, el resorte comenzará a moverse y lo hará cada vez menos gracias a la amortiguación del pistón, hasta encontrar la posición de equilibrio. Vale destacar que existen tres patrones generales de amortiguación distintos, subamortiguado, sobreamortiguado y críticamente amortiguado. Estos difieren en si el resorte oscila varias veces alrededor de la posición de equilibrio, no oscila ninguna vez y alcanza el equilibrio en el menor tiempo posible o, por último, lo alcanza en un tiempo más prolongado también sin oscilar, respectivamente.

Se reconocen entonces la entrada y salida del sistema, que son la fuerza aplicada y la deformación producida respectivamente, ambas definidas para un instante de tiempo, es decir, dependen de éste. El sistema completo se puede luego representar como en la figura 1.

Teniendo presente que la velocidad es la primer derivada del desplazamiento y que la aceleración es la segunda, aplicando la ley de Newton al sistema tenemos

$$f(t) - kz(t) - b\frac{dz(t)}{dt} = m\frac{d^2z(t)}{dt^2} \tag{4}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden. Si consideramos que las condiciones iniciales son 0 tanto para la fuerza inicial como para la velocidad y el desplazamiento, y aplicamos la transformada de Laplace obtenemos

$$F(s) - kZ(s) - bsZ(s) = ms^2Z(s) \tag{5}$$

que agrupando queda

$$F(s) = Z(s)(ms^2 + bs + k) \tag{6}$$

lo que implica que la función de transferencia del sistema G(s) es:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \tag{7}$$

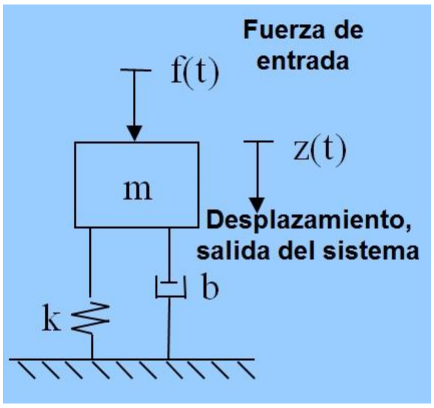

Figura 1: Sistema básico de un amortiguador

Supongamos que a partir del instante 1, una fuerza de 980 N se aplica sobre el amortiguador. Se obvian las unidades. En este caso

$$f(t) = 980h(t-1) \tag{8}$$

con lo cual

$$F(s) = \frac{980e^{-s}}{s} \tag{9}$$

y

$$Z(s) = G(s)F(s) = \frac{980e^{-s}}{s(ms^2 + bs + k)} \tag{10}$$

Por el teorema del valor final mostrado en [1] se puede ver que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{s\to 0} sZ(s) = \frac{980}{k} \tag{11}$$

que es un valor constante e implica que el amortiguador, luego de un lapso de tiempo, se estabilizará en la nueva posición de equilibrio que no es otra que ese valor constante.

También se puede comprobar que la condición inicial se cumple, mediante el teorema del valor inicial mostrado en [1]:

$$f(0) = \lim_{\substack{Re(s)\to+\infty \\ Im(s)=0}} sZ(s) = 0$$

Además de este análisis rápido, se puede estudiar el tipo de amortiguamiento que describirá el sistema en función de los valores m, k y b. Para ello reescribimos (10) de la siguiente manera:

$$Z(s) = \frac{980e^{-s}}{sm\left(s^2 + \frac{bs}{m} + \frac{k}{m}\right)} = \frac{980e^{-s}}{sm\left(s - \frac{\sqrt{b^2-4km}-b}{2m}\right)\left(s + \frac{\sqrt{b^2-4km}+b}{2m}\right)} \tag{12}$$

en donde la raíz $\sqrt{b^2-4km}$ podrá ser un número complejo o real. Estas dos opciones llevan a distintas soluciones. Separando en fracciones simples:

$$Z(s) = \frac{980e^{-s}}{m}\left(\frac{\frac{m}{k}}{s} + \frac{-\frac{m(\sqrt{b^2-4km}+b)}{2k\sqrt{b^2-4km}}}{s - \frac{\sqrt{b^2-4km}-b}{2m}} + \frac{-\frac{m(\sqrt{b^2-4km}-b)}{2k\sqrt{b^2-4km}}}{s + \frac{\sqrt{b^2-4km}+b}{2m}}\right) \tag{13}$$

En el caso que $\sqrt{b^2-4km}$ sea un número real, anti-transformar Z(s) llevará a un resultado de tipo exponencial, que corresponde al movimiento sobreamortiguado. Si $\sqrt{b^2-4km} = 0$ el resultado, también exponencial, es el críticamente amortiguado. Estos casos se deducen de que las tres fracciones simples tienen coeficientes reales y pueden ser anti-transformadas de manera directa. Por otro lado si $\sqrt{b^2-4km}$ es un número complejo no se puede anti-transformar con el mismo criterio, aquí conviene juntar las fracciones con coeficientes complejos para obtener

$$Z(s) = \frac{980e^{-s}}{m}\left(\frac{\frac{m}{k}}{s} - \frac{(ms+b)}{k\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)}\right) \tag{14}$$

que acomodando algunos términos puede verse como

$$Z(s) = \frac{980e^{-s}}{m}\left(\frac{\frac{m}{k}}{s} - \frac{m\left(s + \frac{b}{2m}\right) + \frac{b}{2}}{k\left(\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4km-b^2}}{2m}\right)^2\right)}\right) =$$

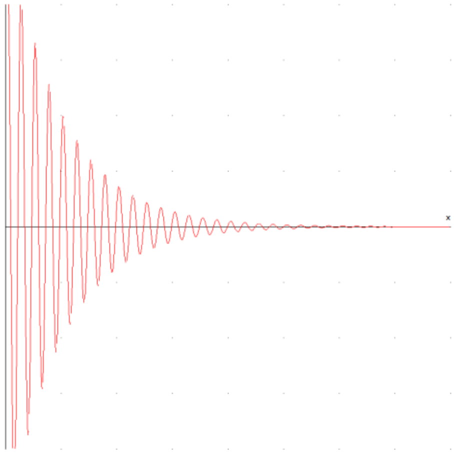

Figura 2: Respuesta oscilatoria en torno a cero

$$= \frac{980e^{-s}}{m}\left(\frac{\frac{m}{k}}{s} - \frac{m}{k}\frac{s+\frac{b}{2m}}{\left(s+\frac{b}{2m}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4km-b^2}}{2m}\right)^2} - \frac{b}{2k}\frac{1}{\left(s+\frac{b}{2m}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4km-b^2}}{2m}\right)^2}\right) \tag{15}$$

En esta última ecuación se puede ver que la primera fracción corresponde a la transformada de un término constante, mientras que la segunda y tercera corresponden a las transformadas de un coseno y un seno, respectivamente, ambos del mismo período y multiplicados por la misma exponencial y distintos coeficientes. Cabe destacar que $\sqrt{4km-b^2}$ es un número real.

Como se puede ver, en el caso que los polos de Z(s) no pertenecen al eje real, la solución z(t) describe un movimiento oscilatorio (debido al coseno y el seno) cuya amplitud disminuye con el tiempo (debido a la exponencial) y su valor tiende a la posición de equilibrio del sistema, de forma similar al que se muestra en la figura 2.

IV. Conclusión

Resulta interesante poder plasmar los conocimientos abstractos estudiados en un caso concreto y cotidiano como el expuesto. Más allá de los cálculos que conlleva, en su mayoría abundantes en expresiones, es importante reconocer que la dificultad de los mismos es mucho menor en comparación con la resolución del problema aplicando integrales.

Es preciso resaltar que en la búsqueda de un ejemplo concreto de aplicación se pueden encontrar muchos casos interesantes y cercanos a la realidad, lo que da una idea clara de la relevancia del modelo matemático estudiado en los sistemas de hoy en día.

Referencias

[1] G. Calandrini, “Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja”. Primer cuatrimestre 2011, página 62. 2011.

[2] Wikipedia, La enciclopedia libre, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_transferencia , [acceso el 22 de agosto de 2011].

[3] E. Niño, “Aplicaciones reales de la transformada de Laplace”, [internet], disponible en http://matematicas.mty.itesm.mx/Paginas/MateParaTodos/e07/Aplicaciones_reales_Laplace.ppt