Transformada de Fourier en el Procesamiento Digital de Imágenes.-

Carolina Bernardini.

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
ctbernardini@gmail.com
Marzo 2014

Resumen: En el siguiente informe mostraremos la fundamentación matemática, mediante el análisis complejo, de una de las técnicas aplicadas al procesamiento digital de imágenes: Filtrado del dominio secuencial. Se trata de un filtro lineal de espectros de señales que permite le compresión de una imagen, que al llamarla la restaura y la mejora, basado en la Transformada de Fourier.

Palabras clave: Filtrado, imagen, transformada de Fourier.

I. INTRODUCCIÓN

El **procesamiento digital de imágenes** es un conjunto de técnicas que se utilizan tanto para mejorar su apariencia visual, así como para prepararlas para procesamiento posterior. Parte del procesamiento es el Filtrado, que obtiene de una imagen original otra mejorada, mediante operaciones aplicadas a los Píxeles.

La Transformada de Fourier otorga una representación del dominio de frecuencias de la imagen, viéndola como una función de 2 dimensiones espaciales. Esta representación del dominio frecuencial nos permite aislar y procesar sus frecuencias, de modo que modificándolas podemos suavizarla, reducir/eliminar ruido y realzar bordes.

II. IMAGEN DIGITAL

Si representamos la imagen como una función de 2 dimensiones espaciales, f(x,y), donde x e y son las coordenadas espaciales, la amplitud de dicha función en algún par de coordenadas (x,y) es llamada intensidad de la imagen en el punto.

Cuando las variables x e y, y los valores de la amplitud de la función f son cantidades discretas finitas (están determinadas sólo para ciertos valores), a dicha imagen se le llama **imagen digital**. Una imagen digital está compuesta de un número finito de elementos llamados pixeles y cada uno tiene una localidad y valor particulares.

Un pixel es la menor unidad homogénea en color que hace parte de una imagen digital; estos aparecen como pequeños cuadrados coloreados en blanco y negro o en niveles de grises. Las imágenes están conformadas por una matriz rectangular de píxeles, donde cada uno constituye un área de la imagen real.

III. FILTROS

Los **filtros** son operaciones que se aplican a los píxeles de una imagen digital para optimizarla, enfatizar cierta información o conseguir un efecto especial en ella.

Los **filtros en el dominio de la frecuencia** procesan una imagen trabajando sobre la Transformada de Fourier de la imagen. Se usan, principalmente, para eliminar altas o bajas frecuencias de la imagen, lo que se traduce en:

- **Suavizar la imagen**: Reduce la cantidad de variaciones entre píxeles vecinos
- **Eliminar ruido**: elimina aquellos píxeles cuyo nivel de intensidad es muy diferente al de sus vecinos y cuyo origen puede estar tanto en el proceso de adquisición de la imagen como en el de transmisión.
- **Realzar o detectar bordes**: detecta los píxeles donde se produce un cambio brusco en la función intensidad.

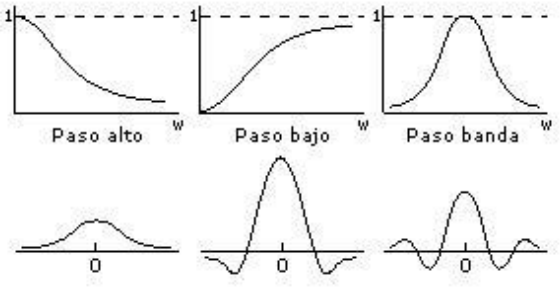


Figura 1: Efecto de los distintos filtros sobre una señal

A. *Filtro paso bajo*

.-

Atenúa las frecuencias altas y mantiene sin variaciones las bajas. El resultado en el dominio espacial es equivalente al de un filtro de suavizado, donde las altas frecuencias que son filtradas se corresponden con los cambios fuertes de intensidad. Consigue reducir el ruido suavizando las transiciones existentes. El más sencillo es el filtro de paso bajo ideal:

$$H(u,v)\begin{cases}1\ si\ D(u,v) \le D_0\\ 0\ si\ D(u,v) > D_0\end{cases}$$

donde D(u,v) es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias. Este filtro suprime las altas frecuencias mayores que un cierto valor D0, que se denomina frecuencia de corte, y deja las demás tal como están.

B. *Filtro paso alto*

Atenúa las frecuencias bajas manteniendo invariables las frecuencias altas. Puesto que las altas frecuencias corresponden en las imágenes a cambios bruscos de densidad, este tipo de filtros refuerza los contrastes que se encuentran en la imagen. El más sencillo, es el filtro de paso alto ideal:

$$H(u,v)\begin{cases}1\ si\ D(u,v) > D_0\\ 0\ si\ D(u,v) \le D_0\end{cases}$$

donde D(u,v) es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias. Este filtro suprime las frecuencias menores o iguales que un cierto valor D_0 que se denomina frecuencia de corte.

C. *Filtro paso banda:*

Atenúa frecuencias muy altas o muy bajas manteniendo una banda de rango medio. En el caso del filtro ideal, solo deja pasar las frecuencias que están entre dos frecuencias de corte. Se puede obtener un filtro de banda multiplicando uno de paso bajo por uno de paso alto, en el que la frecuencia de corte del de paso bajo sea superior a la de paso alto. El opuesto al filtro de paso de banda seria de "rechazo de banda" en el que se atenúan las frecuencias de la banda pero se mantienen las frecuencias fuera de ella.

IV. TRANSFORMADA DE FOURIER

El **espectro de frecuencias** de un fenómeno ondulatorio (sonoro, luminoso o electromagnético), es una medida de la distribución de amplitudes de cada frecuencia, es decir, detalla con cuánta frecuencia se repiten ciertos patrones en dicho fenómeno. Si $\mathcal{F}\{f(t)\}=F(t)$ es la transformada de Fourier de la señal f(t), entonces a F(t) también se la conoce como **espectro de frecuencia (compleja) de f(t).**

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\, Ft}\, dt \qquad (1)$$

Por lo tanto, es posible obtener la representación del espectro de frecuencias de una imagen digital mediante la Transformada de Fourier, donde F representa cada frecuencia que posiblemente contiene la señal f(t).

El análisis de Fourier de una señal permite determinar sus frecuencias, pero a costa de perder la información de tipo temporal (No dice cuando aparece cada frecuencia).

V. ETAPAS DEL PROCESAMIENTO

Para aplicar los filtros antes mencionados, se trabaja con señales muestreadas, que pueden pensarse como el producto de la señal continua por una función de muestreo.

El espectro de una señal muestreada consistirá en copias periódicas del espectro de la señal original, siempre y cuando la señal original contenga frecuencias acotadas por una frecuencia máxima, y la señal muestreada tenga una frecuencia mayor al doble de esta.

Para obtener su espectro se frecuencia, se debe recurrir al producto de Convolución (ver figura 1):

Teorema de Convolución *Dadas dos funciones continuas a pedazos f(t) y g(t), el producto de Convolución entre ellas, denotado por f(t)*g(t), está definido por*

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du \qquad (2)$$

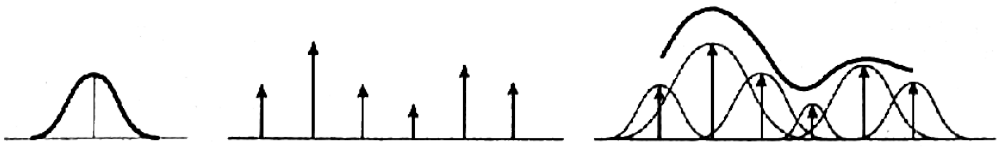


Figura 1: Ejemplo de Convolución entre dos funciones.

La Transformada de Fourier del producto de Convolución, equivale al producto punto a punto de las transformadas: dadas dos señales A(t) y B(t) , y sus respectivos espectros E[A] y E[B], entonces vale

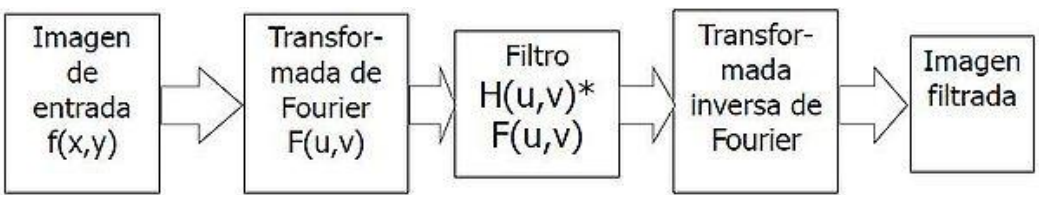
$$E[A(t)B(t)] = E[A(t)] * E[B(t)] \qquad \rightleftarrows \qquad E[A(t)]\,E[B(t)] = E[A(t) * B(t)] \qquad (3)$$

Este resultado nos permite pensar en manipular cualidades de la señal, alterando su espectro con la utilización de un filtro adecuado.

La relación que nos permite obtener la señal discreta nuevamente a partir de su espectro, obteniendo la señal de la "imagen mejorada" es la transformada inversa de Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(F)e^{2\pi i\,Ft}\,dF \qquad (4)$$

En síntesis, las etapas del procesamiento de imágenes en el dominio de la frecuencia son:



VI. Conclusión

Las aplicaciones del Procesamiento Digital de Imágenes son muchas y variadas, y la tendencia es que las aplicaciones y el público en general lo utilice en forma creciente.

El procesamiento de imágenes empleando la Transformada de Fourier es relativamente sencillo y muy práctico para lograr los efectos requeridos. Funciona de un modo muy intuitivo: la modificación de frecuencias bajas es relativa a la suavidad de la imagen, y la de frecuencias altas relativa al realce de bordes.

Con solo un concepto importante del análisis complejo, como es la Transformada de Fourier, uno es capaz de entender cómo es posible modificar y mejorar imágenes digitales.

Referencias

[1] James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, pp. 384-367, 2002.

[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Procesamiento_digital_de_imágenes [acceso el 20 de febrero 2014].

[3] Procesamiento Digital de Imágenes, [internet] disponible en http://www.lip.uns.edu.ar/pdi/index32.htm [acceso el 20 de febrero de 2014].