Transformada de Laplace
Aplicación a osciladores armónicos amortiguados

Avila Federico Javier

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
federicoavila_07@hotmail.com

Julio 2015

Resumen: Un oscilador armónico, ya sea mecánico o eléctrico, es un sistema que aparece repetidas veces en problemas de ingeniería y ciencias. Estos sistemas físicos pueden representarse matemáticamente por medio de la segunda ley de Newton, dando lugar a una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O) lineal de segundo orden con coeficientes constantes. El informe busca resolver la ecuación diferencial de un oscilador armónico amortiguado aplicando la Transformada de Laplace y haciendo uso de sus propiedades.

Palabras clave: oscilador armónico amortiguado, Transformada de Laplace, ecuación diferencial.

I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace es un tipo de transformada integral. La transformada de Laplace de una función f(t) definida para todos los números positivos t ≥ 0, es la función

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

La función original f(t) se conoce como transformada inversa, es decir

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Entre todas las propiedades de la Transformada de Laplace, se utilizarán, en esta Nota de Aplicación, las siguientes

Linealidad: para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Traslación: para $a \in \mathbb{C}$

$$e^{at} f(t) \leftrightarrow F(s-a)$$

Derivada:

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Esta última propiedad permite resolver fácilmente ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes, ya que transforma el problema complejo de resolver una ecuación diferencial (o un sistema de ecuaciones diferenciales) en un problema más sencillo como es la resolución de una ecuación algebraica (o un sistema de ecuaciones lineales). Luego de manipulaciones algebraicas, para obtener la expresión de F(s) en función de s, se aplica la transformada inversa de Laplace para llegar a la solución de la ecuación diferencial original.

II. MOVIMIENTO DE UN OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

Un sistema es un oscilador armónico amortiguado si, cuando se deja en libertad fuera de su posición de equilibrio, vuelve hacia ella describiendo oscilaciones sinusoidales amortiguadas en torno a dicha posición estable. El sistema masa-resorte-amortiguador, como el de la *figura 1*, es el ejemplo más común de este tipo de osciladores, sin embargo, no es el único.

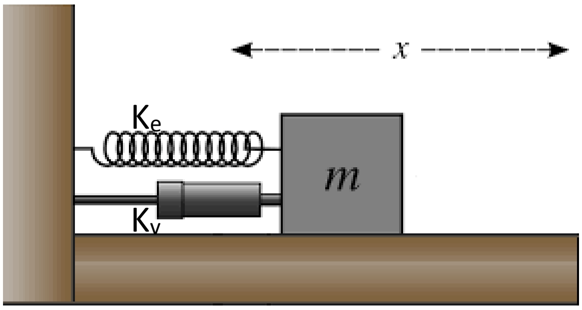

Figura 1: Masa unida a un resorte de constante elástica k_e y a un amortiguador de constante viscosa k_v

Aplicando la segunda Ley de Newton a este sistema, llegamos a la siguiente ecuación

$$\vec{F_e} + \vec{F_v} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad (1)$$

Con

$\vec{F_e} = -k_e x\, \hat{\imath}$	Fuerza elástica (Ley de Hooke)
$\vec{F_v} = -k_v \dot{x}\, \hat{\imath}$	Fuerza viscosa (Amortiguador)
$\vec{N} = N\, \hat{\jmath}$	Fuerza normal
$\vec{g} = -g\, \hat{\jmath}$	Aceleración de la gravedad terrestre
$\vec{a} = \ddot{x}\, \hat{\imath}$	Aceleración de la masa

Luego, teniendo en cuenta que el movimiento es solo horizontal, despreciando el rozamiento entre la masa y la superficie horizontal y teniendo en cuenta la notación $\omega_0{}^2 = \frac{k_e}{m}$, llegamos a una ecuación diferencial ordinaria lineal, de segundo orden y con coeficientes constantes.

$$\ddot{x} + \frac{k_v}{m}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \quad (2)$$

La solución de esta ecuación diferencial será una x(t), que corresponde a la posición de la masa en función del tiempo. Para resolverla, le aplicamos la transformada de Laplace de la siguiente manera

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \frac{k_v}{m}\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega_0{}^2\mathcal{L}\{x\} = 0$$

Llamando *X(s)* a $\mathcal{L}\{x(t)\}$, usando las propiedades anteriormente mencionadas y despejando, llegamos a

$$X(s) = \frac{s x_0 + \dot{x}_0 + \frac{k_v}{m}x_0}{s^2 + \omega_0{}^2 + \frac{k_v}{m}s} \quad (3)$$

Luego, separando por fracciones simples y considerando que $\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 > 4\omega_0{}^2$aplicamos la transformada inversa para llegar a la solución

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s + \frac{\frac{k_v}{m} - \sqrt{\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 - 4\omega_0{}^2}}{2}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s + \frac{\frac{k_v}{m} + \sqrt{\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 - 4\omega_0{}^2}}{2}}\right\}$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (4)$$

Donde A y B dependen de las condiciones iniciales de la siguiente manera

$$A = \frac{\frac{-\frac{k_v}{m} + \sqrt{\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 - 4\omega_0{}^2}}{2}x_0 + \dot{x}_0 + \frac{k_v}{m}x_0}{\sqrt{\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 - 4\omega_0{}^2}}$$

$$B = \frac{\frac{-\frac{k_v}{m} - \sqrt{\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 - 4{\omega_0}^2}}{2} x_0 + \dot{x}_0 + \frac{k_v}{m} x_0}{\sqrt{\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 - 4{\omega_0}^2}}$$

Y λ_1 y λ_2 de las constantes del resorte y del amortiguador

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{k_v}{m} + \sqrt{\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 - 4{\omega_0}^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{k_v}{m} - \sqrt{\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 - 4{\omega_0}^2}}{2}$$

Además, (4) es válida si λ_1, λ_2, A y B son números complejos. Esto ocurre cuando $\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 < 4{\omega_0}^2$, que aplicando la teoría de funciones de variable compleja, resulta

$$\chi(t) = Ae^{-tk_v/2m} e^{it\sqrt{{\omega_0}^2 - \left(\frac{k_v}{2m}\right)^2}} + Be^{-tK/2} e^{-it\sqrt{{\omega_0}^2 - \left(\frac{k_v}{2m}\right)^2}}$$

$$\chi(t) = e^{-tk_v/2m}[A(cos\{\omega t\} + i\, sin\{\omega t\}) + B(cos\{-\omega t\} + i\, sin\{-\omega t\})]$$

Sin embargo, como la parte imaginaria de la función no tiene sentido en este problema, tomamos solo la parte real como solución.

$$Re\{\chi(t)\} = x(t) = Ce^{-tk_v/2m} cos\{\omega t + \varphi\} \tag{5}$$

Con las constantes C y φ , que dependen nuevamente de las condiciones iniciales y $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \left(\frac{k_v}{2m}\right)^2}$

Por otro lado, si $\left(\frac{k_v}{m}\right)^2 = 4{\omega_0}^2$, al separar (3) por fracciones simples y aplicarle la transformada inversa, se obtiene

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\frac{k_v}{2m}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{\left(s+\frac{k_v}{2m}\right)^2}\right\}$$

$$x(t) = Ae^{-tk_v/2m} + Bte^{-tk_v/2m} \tag{6}$$

Donde

$$A = x_0$$

$$B = \frac{k_v}{2m} x_0 + \dot{x}_0$$

Luego, si se quiere encontrar la expresión para la velocidad y aceleración en función del tiempo, se procede a derivar (4), (5) o (6) (según sea el caso) en función del tiempo t.

III. CIRCUITOS RLC

Un circuito constituido por una resistencia R, una bobina de inductancia L y un condensador de capacitancia C, como el de la *figura 2,* es otro caso de un oscilador armónico amortiguado.

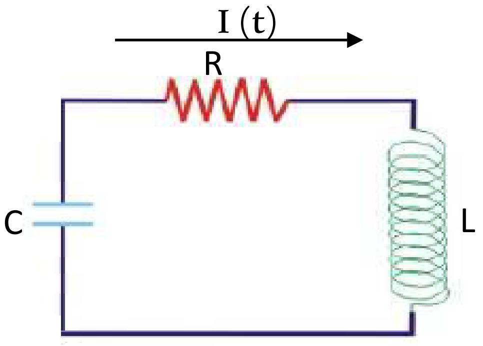

Figura 2: Circuito RLC

Al plantear una de las leyes de circuitos (Segunda Ley de Kirchhoff) en términos de la tensión, llegamos a la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2V}{dt^2} + R\frac{dV}{dt} + \frac{1}{C}V = 0$$

Nuevamente, con la notación ${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$ llegamos a una ecuación diferencial similar a (2)

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV}{dt} + {\omega_0}^2V = 0 \qquad (7)$$

Aplicando la Transformada de Laplace, realizando operaciones algebraicas, anti-transformando y suponiendo que la resistencia es pequeña, es decir, $\left(\frac{R}{L}\right)^2 < 4{\omega_0}^2$.

$$V(t) = V_0e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (8)$$

Con $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

IV. CONCLUSIÓN

En conclusión, la teoría de Funciones de Variable Compleja es de gran importancia en muchas ramas de la ciencia y la ingeniería.

La Transformada de Laplace nos brinda una herramienta muy eficaz para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Su utilización resulta ser, entonces, un método alternativo y relativamente sencillo para la resolución de este tipo de ecuaciones, permitiendo llegar a su solución de manera rápida y directa.

Como se pudo demostrar en la Nota de Aplicación, esta teoría puede aplicarse para resolver problemas de circuitos eléctricos, por lo tanto, es esencial para la ingeniería eléctrica.

REFERENCIAS

[1] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación. pp 135-139, 2002.
[2] G. Calandrini, *Guía de definiciones y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja*. pp 47-53, 2015.
[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Oscilador_armónico, [acceso el 13 de julio de 2015].
[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace, [acceso el 13 de julio de 2015].