Transformada Zeta
Aplicación: Señales y sistemas de tiempo discreto o digital

Federico A. Arroyo Huber

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
fede.arroyo@gmail.com
Agosto 2011

Resumen: El siguiente trabajo muestra de forma escrita una de las aplicaciones de la Transformada Z en la resolución de ecuaciones en diferencias en un sistema genérico de tiempo discreto. Luego se muestra una aplicación de ingeniería en la cual mediante un sistema realimentado de tiempo discreto se controla con un motor la posición de una antena móvil. Por último se dan algunos ejemplos de otras aplicaciones de esta transformada.

Palabras Clave: Transformada Z, ecuaciones en diferencias, sistemas realimentados de tiempo discreto, diagrama de bloques, estabilidad de sistemas.

I. INTRODUCCIÓN

La Transformada de Zeta es un modelo matemático similar a la transformada de Fourier para el caso del tiempo discreto o las transformadas de Fourier y Laplace para el caso de tiempo continuo, que se emplea entre otras aplicaciones en el estudio del procesamiento de señales digitales, como son el análisis y proyecto de circuitos digitales, los sistemas de radar o telecomunicaciones y especialmente los sistemas de control de procesos por computadoras.

II. DESARROLLO

Supongamos que la sucesión de observaciones $\{x_k\}$ está siendo grabada y recibimos la observación x_k en el paso (tiempo) o índice k. Podríamos intentar procesar (por ejemplo suavizar o filtrar) esta sucesión de observaciones $\{x_k\}$ utilizando el sistema de retroalimentación de tiempo discreto ilustrado en la Figura 1.

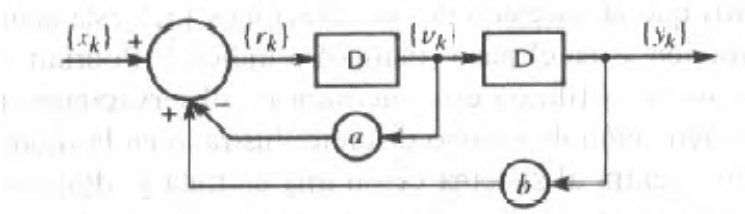

Figura 1. Diagrama en bloque de un sistema de control.

En el tiempo k la observación x_k entra al sistema como una entrada y después de mezclarse con la señal de retroalimentación en la unión de sumas continúa hacia el bloque D transformada en la señal r_k. Este bloque representa un retardo unitario y su función es mantener su señal de entrada hasta que el reloj avance un paso, al paso $k+1$. En este momento la señal de entrada sale sin alteraciones convirtiéndose en la señal retardada un segundo v_k. Al mismo tiempo parte de esta señal es regresada hacia atrás a través del bloque de ganancia constante ``a´´ a la unión de suma. Este proceso es instantáneo y en la unión de sumas la señal de retroalimentación es retrasada de la siguiente observación de entrada $x_{k+1}$ para proveer la siguiente entrada al bloque de retardo ``D´´.

Mientras que parte de la señal v_k es enviada hacia el bloque de sumas por medio del bloque ``a´´, otra parte es dirigida hacia un segundo bloque de retardo ``D´´, el cual cumple la misma función retardando la señal v_k para convertirla en la señal y_k.

Matemáticamente las salidas de los bloques de retardo son:

$$y_{k+1} = v_k \tag{1}$$

$$v_{k+1} = r_k \tag{2}$$

Y en la unión de sumas:

$$r_k = x_k - av_k + by_k \tag{3}$$

De la ecuación (1) obtengo

$$y_{k+2} = v_{k+1} \tag{4}$$

Que al utilizar la ecuación (2) puedo expresar

$$y_{k+2} = r_k \tag{5}$$

Al sustituir r_k de (3) se obtiene

$$y_{k+2} = x_k - av_k + by_k \tag{6}$$

Que usando (1) se convierte en

$$y_{k+2} = x_k - ay_{k+1} + by_k \tag{7}$$

Reorganizando esto da

$$y_{k+2} + ay_{k+1} - by_k = x_k \tag{8}$$

Observamos que la ecuación (8) es una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de segundo orden porque el término involucrado en el mayor corrimiento de la sucesión $\{y_k\}$ es el término y_{k+2}, lo que implica un corrimiento de dos pasos. Por último sabemos que la ecuación (8) representa el sistema de la Figura 1.

Si al sistema de la figura 1, ahora le asignamos valores como por ejemplo $a=1$, $b=2$ y la sucesión de entrada $\{x_k\}$ es la sucesión escalón unitario $\{1\}$ entonces podremos resolver la ecuación en diferencias (8) utilizando la transformada Z.

Sustituyendo los valores de a y b en la ecuación (8) obtenemos

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1 \quad (k \geq 0) \tag{9}$$

Aplicando la transformada Z en (9) da

$$\mathcal{Z}\{y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k\} = \mathcal{Z}\{1, 1, 1, \dots\} \tag{10}$$

Que utilizando la propiedad de linealidad y el resultado $\mathcal{Z}\{1\} = z/(z-1)$, puede escribirse como

$$\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} + \mathcal{Z}\{y_{k+1}\} - \mathcal{Z}\{2y_k\} = \frac{z}{z-1} \tag{11}$$

Recordemos las transformadas

$$\mathcal{Z}\{x_{k+1}\} = zX(z) - z\mathrm{x}_0 \tag{12}$$

$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2X(z) - z^2\mathrm{x}_0 - z\mathrm{x}_1 \tag{13}$$

Utilizando (12) y (13) en la ecuación (11) se obtiene

$$[z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1] + [zY(z) - zy_0] - 2Y(z) = \frac{z}{z-1} \tag{14}$$

Que al reorganizar es

$$(z^2 + z - 2)Y(z) = \frac{z}{z-1} + z^2y_0 + z(y_1 + y_0) \tag{16}$$

Para continuar resolviendo la ecuación necesitaremos conocer el primer y segundo término y_0 e y_1 de la sucesión solución $\{y_k\}$. Sin esta información adicional no podemos obtener una solución única.

Supongamos que estos valores los conocemos (o son datos)

$$y_0 = 0, \;\; y_1 = 1$$

Entonces al aplicar los valores y_0 e y_1 en la ecuación (15) se convierte en

$$(z^2 + z - 2)Y(z) = z + \frac{z}{z-1} \tag{17}$$

Que al descomponer obtenemos

$$(z+2)(z-1)Y(z) = z + \frac{z}{z-1} \tag{18}$$

Despejando Y(z) obtenemos

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)} + \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)^2} \tag{19}$$

Luego dividimos por *z* ambos miembros y entonces

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} \tag{20}$$

Recordamos las siguientes transformadas

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{(z-a)} \tag{21}$$

$$\mathcal{Z}\{ka^{k-1}\} = \frac{z}{(z-a)^2} \tag{22}$$

Acomodamos la ecuación (18) y obtenemos

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{3}\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{z}{(z-1)} - \frac{2}{9}\frac{1}{z+2} \tag{23}$$

Finalmente anti transformamos usando (20) y (21)

$$\{y_k\} = \left\{\frac{1}{3}k + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}(-2)^k\right\} \quad (k \geq 0) \tag{24}$$

La ecuación (23) representa la sucesión solución para la ecuación en diferencias que satisface las condiciones $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$.

El método desarrollado en este ejemplo se llama método de la transformada z para resolver ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, y es análogo al método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

III. EJEMPLO DE UN SISTEMA DE CONTROL CON PERTURBACIONES

Un ejemplo de un sistema con control con perturbaciones, es el de una antena dirigible con un movimiento angular y que puede recibir como señales de entrada, además de la orden de posición de referencia, a perturbaciones externas, como por ejemplo fuerzas producidas por el viento, o también perturbaciones en el control producidas por errores de lectura en las mediciones de la señal de salida o en el proceso del computador.

El esquema que representa el sistema se ilustra en la figura 2, donde los elementos que lo componen son:

Sistema Base: Antena + Plataforma + Engranaje + Motor + Amplificador de Potencia

Y: Señal de Salida:	Posición angula de la Antena
Pert:	Perturbación externa
A:	Antena
P:	Plataforma de la Antena
E:	Engranaje
M:	Motor
AP:	Amplificador de Potencia

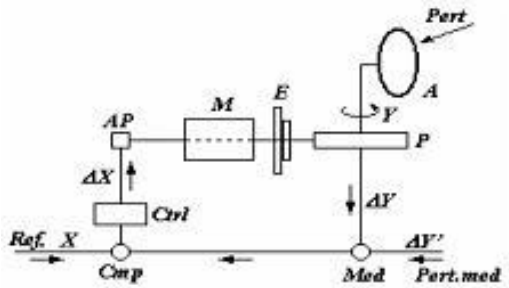

Figura 2. Esquema del sistema de control de posición de una antena.

Sistema de Control: Medidor de Posición de Antena + Comparador + Controlador

Med:	Medidor de Posición de la Antena (Potenciómetro)
Cmp:	Comparador
Ctrl	Controlador
X:	Señal de entrada (Referencia)
Pert. Med	Perturbación del medidor: Perturbación del Control

La antena recibe una señal analógica que puede o no estar perturbada, esta ingresa al medidor de la posición en el cual también se agregan otras perturbaciones provenientes del sistema de control. Esta señal en parte "contaminada" ingresa al comparador donde analiza el error de la posición al contrastar la señal contaminada con una señal de referencia también analógica. Al ingresar ambas señales analógicas al controlador, este posee un conversor analógico-digital el cual tiene como salida una señal de tiempo discreto, a su vez este controlador se encarga de dar la orden al sistema Motor-Engranaje para corregir la posición de la antena.

Este es un ejemplo de un sistema de control realimentado en tiempo discreto.

IV. OTRAS APLICACIONES:

La Transformada Z puede utilizarse para determinar la estabilidad de un sistema de tiempo discreto, como por ejemplo un radar, resonador magnético entre otras cosas:

Un sistema de control en lazo cerrado es aquel que posee realimentación, es decir, que la señal de salida tiene efecto directo sobre la acción de control. Por el contrario un sistema en lazo abierto no tiene realimentación.

Para determinar la estabilidad debemos analizar la **función transferencia**, la cual relaciona la entrada y la salida de un sistema de tiempo discreto.

Para que un sistema de control en lazo cerrado sea estable, todos los polos de la función transferencia de lazo cerrado deben presentarse en el plano z dentro del círculo unidad. Si algún polo esta fuera de dicho círculo es inestable.

Si algún polo simple se presenta en el círculo unidad ($z=1$ o $z=-1$), o si solo un par de polos complejos conjugados se presentan sobre el círculo unidad, entonces el sistema es críticamente estable. Si el polo sobre el círculo unidad fuese múltiple el sistema es inestable.

Si un sistema es **estable**, la transformada z inversa de su función transferencia tiende a cero en el infinito. Esto no asegura que la salida del sistema siga perfectamente a la entrada. En el ejemplo significaría que la posición de la antena coincida o no con la señal de referencia. En general puede existir un error que depende del tipo de entrada.

Si un sistema es **inestable**, su transformada z inversa no es acotada.

Y si un sistema es **críticamente estable**, no ocurre ninguna de estas dos cosas. O el límite es una constante distinta de cero, o no existe como por ejemplo, los senos, cosenos, y la función $((-1)^k)$.

Las ecuaciones en diferencias se emplean también en economía, crecimiento de poblaciones, biología, etc, y todas se resuelven con la Transformada Z.

V. CONCLUSIÓN

La importancia del modelo de la Transformada Z radica en que permite reducir ecuaciones en diferencias o ecuaciones recursivas con coeficiente constantes a ecuaciones algebraicas lineales. Este tipo de ecuaciones provienen de todo tipo de sistemas digitales utilizados para control, procesamiento de imágenes y sonido, etc.

REFERENCIAS

[1] Glyn James, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

[2] Ing Juan Sacerdoti, *Transformada Z, Departamento de Matemática, UBA, 2003.*

[3] *Aplicación de la Transformada Z a sistemas de control.* http://www.dma.fi.upm.es/ctorres/curso-interactivo-control/cap3.pdf

[4] *Señales y sistemas discretos en el tiempo* http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lep/alonso_a_jp/capitulo2.pdf