Temperatura de la tierra

Gabriel Anaya

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
anaya.g@hotmail.com
Agosto 2015

Resumen: En este artículo se estudian las series de Fourier y la aplicación de las mismas en un problema particular, el cual es, la temperatura de la Tierra a una profundidad x.

INTRODUCCIÓN

La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de periodo T puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo período T. El problema aparece naturalmente en astronomía, de hecho, Neugebauer descubrió que los Babilonios utilizaron una forma primitiva de las series de Fourier en la predicción de ciertos eventos celestiales. La historia moderna de las series de Fourier comenzó con D' Alambert y su tratado de las oscilaciones de las cuerdas del violín. El desplazamiento u=u(t,x) de una cuerda de violín, como una función del tiempo t y de la posición x, es solución de la ecuación diferencial

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, t>0 , 0<x<1

sujeto a las condiciones iniciales u(t,0) = u(t,1) = 0 para t ≥0 $\frac{\partial u}{\partial t}$(0,x)= 0 para 0<x<1. La solución de este problema es la superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas a la velocidad 1, como lo expresa la fórmula de D' Alambert:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t)$$

en la cual f es una función impar de periodo 2 que se anula en los puntos x = 0, ±1, ±2,… Euler en 1748 propuso que tal solución podía ser expresada en una serie de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin n\pi x,$$

y como consecuencia

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \cos n\pi t \sin n\pi x .$$

Las mismas ideas fueron luego expuestas por D. Bernoulli y Lagrange. La formula

$$\hat{f}(n) - 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

para calcular los coeficientes apareció por primera vez en un artículo escrito por Euler en 1777.
La contribución de Fourier comenzó en 1807 con sus estudios del problema del flujo del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

APLICACIÓN: TEMPERATURA DE LA TIERRA

Un problema sencillo pero muy interesante es el de calcular la temperatura de la tierra a una profundidad x a partir de la temperatura de la superficie .Describamos la temperatura de la superficie terrestre como una función f periódica en el tiempo t y de perıodo 1 (un año). La temperatura u(t,x) en el tiempo t≥0 y profundidad x ≥0 es

también periódica en t y es natural asumir que $|u| = \|f\|_\infty$. Bajo estas circunstancias u(t,x) puede ser expandida mediante una serie de Fourier para cada 0≤ x < ∞ fijo como sigue:

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(x) e^{2\pi i n t},$$

con coeficientes de Fourier

$$c_n(x) = \int_0^1 u(t,x) e^{-2\pi i n t}\, dt.$$

Sabemos que la función u satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad \text{(Ecuación del calor)}.$$

Por lo tanto,

$$c_n'' = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) e^{-2\pi i n t}\, dt = 2\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) e^{-2\pi i n t}\, dt = 4\pi i n c_n.$$

En otras palabras, los coeficientes c_n satisfacen la ecuación

$$c_n'' = [(2\pi|n|)^{1/2}(1 \pm i)]^2 c_n,$$

tomando el signo positivo o negativo de acuerdo a si n > 0 ó n < 0. Por otra parte, sabemos que $c_n(0)=\int_0^1 f(t)e^{-2\pi i n t}\ dt = \hat{f}(n)$. Resolviendo la ecuación obtenemos que:

$$c_n(x) = \hat{f}(n)\exp[-(2\pi|n|)^{1/2}(1 \pm i)x],$$

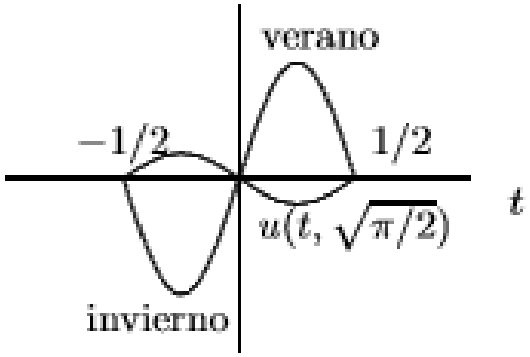
y por lo tanto resulta finalmente

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\exp[-(2\pi|n|)^{1/2}x]\exp[2\pi i n t \mp (2\pi|n|)^{1/2} i x].$$

Supongamos por ejemplo que la temperatura de la superficie viene dada por una función sinusoidal simple f(t) = sin(2πt) (lo cual significa que la temperatura anual media $\hat{f}=\int_0^1 f$ es cero). En este caso la función u vendrá dada por:

$$u(t,x) = \exp(-\sqrt{2\pi}x)\sin(2\pi t - \sqrt{2\pi}x).$$

Esta fórmula nos dice que la temperatura a la profundidad x =$\sqrt{\pi/2}$ queda afectada por el factor e^{π} y está completamente fuera de fase con respecto a las estaciones como lo indica la siguiente figura :



CONCLUSIÓN

En conclusión, podemos decir que la teoría que hay en el fondo de la materia Funciones de Variable Compleja no es muy complicada, y brinda incontables herramientas para el futuro en cualquier rama de la ingeniería. En este caso, se ha analizado una de las tantas aplicaciones que se pueden realizar mediante la utilización de series de Fourier. Podemos apreciar que no es estrictamente necesario un conocimiento completo del tema para poder realizar esta, como otra de las aplicaciones, solo basta con poseer las fórmulas adecuadas y un leve conocimiento del tema en cuestión. Igualmente se recomienda un estudio más profundo del tema para un mejor entendimiento del mismo, según sea la necesidad.

Referencias

[1] Dym, H., McKean, H. P., Fourier Series and Integrals. Academic Press, New York, 1972.
[2] Rudin, W., Análisis Real y Complejo. Alhambra, Madrid, 1979.
[3] Kolmogorov, A. N., Fomın, S. V., Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial MIR, Moscú´, 1972.
[4]Divulgaciones Matemáticas v. 5, No. 1/2 (1997), 43–60.
[5] Glyn James, “Matemáticas avanzadas para ingeniería, segunda edición”.