Representación del sonido mediante Series de Fourier
Funciones de Variable Compleja

Ana Luz López

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur,Avda. Alem 1253,B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
analuz.lpz@gmail.com
Diciembre 2013

Resumen: En esta nota de aplicación se tratará el tema de la representación del sonido mediante Series de Fourier. En principio se introducirá el tema de forma teórica para luego continuar con la parte práctica, es decir, teoremas y ecuaciones necesarios para el desarrollo del tema elegido.

Palabras clave: onda, sonido, Fourier.

I. INTRODUCCIÓN

A. Conceptos Básicos.

En matemática, una función es **periódica** de período *T* si para cualquier valor entero de *a*, se verifica:

$$f(x) = f(x + aT)$$

De la misma manera pero visto desde la física, las ondas periódicas son aquellas ondas que muestran periodicidad respecto del tiempo, es decir, describen ciclos repetitivos:

$$f(t) = f(t + aT)$$

Aquí, donde *a* es cualquier numero entero y T es el período, donde

$$T = \frac{1}{frec}$$

Una función es **continua a tramos** en un intervalo [*a,b*] si es posible partir el intervalo en un número finito de subintervalos de tal manera que la función sea continua en cada uno de ellos y tenga límites a izquierda y a derecha.

B. Teorema de Fourier.

Si una función es periódica con período T=2L, continua a tramos en [-L,L], tiene como representación la serie:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \, sen(\frac{n\pi x}{L}))$$

Donde tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$n = 1,2,3..$

La serie de senos y cosenos descripta también puede representarse de manera exponencial como:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

Donde

$$\gamma_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{L}}$$

La serie converge a $\frac{f(x_0{}^{+}) + f(x_0{}^{-})}{2}$ en todos los puntos x_0 donde f tenga derivada a derecha y a izquierda.

La frecuencia fundamental *Fc* ocurre cuando *n = 1*. Y se escribe:

$$Fc = \frac{\pi}{L}$$

II. El sonido

Desde un punto de vista físico el sonido es una vibración que se propaga en un medio elástico.

Para que se produzca sonido se requiere la existencia de un cuerpo vibrante, denominado y de un medio elástico que transmita esas vibraciones, que se propagan por él constituyendo lo que se denomina onda sonora.

Tenemos costumbre de distinguir entre sonidos y ruidos. Los primeros son aquellos que nos producen sensación agradable.

Si se obtienen gráficas de registro de las vibraciones se observa que, en general, los sonidos musicales poseen ondas casi sinusoidales, aunque alteradas a veces apreciablemente por la presencia de sus armónicos. Los restantes sonidos armónicos conservan todavía una total periodicidad aunque su gráfica se aleje notablemente de una sinusoide, por estar compuestos de varios grupos de ondas de frecuencias fundamentales distintas, acompañadas de algunos de sus armónicos.

Los ruidos tienen gráficas carentes de periodicidad y es precisamente esta peculiaridad lo que produce que la sensación cerebral resulte desagradable o molesta.

A. Características

Generalmente se utilizan cuatro cualidades subjetivas para describir un sonido musical: intensidad, tono, timbre y duración. Cada uno de estos atributos depende de uno o más parámetros físicos que pueden ser medidos.

Cuando hablamos de la duración del sonido nos referimos a la prolongación de éste en el tiempo. De tal forma, podemos diferenciar entre sonidos largos y sonidos cortos; la intensidad del sonido (o volumen) es la energía que transmite la onda sonora y está relacionada con la amplitud de ésta, es decir; a mayor amplitud, mayor volumen y a menor amplitud, menor volumen. Por otro lado la altura es la propiedad sonora que nos permite distinguir entre sonidos graves y sonidos agudos; y por último el timbre es la cualidad sonora que distingue dos o más sonidos producidos por cuerpos distintos, es decir, nos permite diferenciar si un sonidos ha sido producido por un violín, una guitarra, etc. o por la voz humana.

B. *Armònicos del sonido*

Son los componentes de un sonido que se definen como las frecuencias secundarias que acompañan a una frecuencia fundamental o generadora.
Los sonidos armónicos son producidos por la naturaleza, al recibir cuerpos capaces de vibrar las ondas sonoras que emite un sonido fundamental al espacio y se han utilizado como base de los sistemas de temperamento justo.
El armónico de una onda es un componente sinusoidal de una señal. Su frecuencia es un múltiplo de la fundamental.
Es decir, si *Fc* es la frecuencia fundamental

- Primer armónico = 2 Fc
- Segundo armónico = 3 Fc

Y así siguiendo.

III. Conclusión

Concluimos que como el sonido es una forma de onda continua, con ciertas características, éste puede ser representado por medio de series de Fourier.

En muchos casos los sonidos presentan formas complejas, difíciles de expresar matemáticamente, ya que son el resultado de composiciones y superposiciones de otras ondas sonoras; por lo que la representación mediante series de Fourier se torna una de las más adecuadas, ya que la misma es una suma de ondas simples (seno y coseno).

También vemos que para los armónicos del sonido, así como en la representación de Fourier, se utiliza la frecuencia fundamental, y múltiplos de la misma, que serían los distintos armónicos, en función de que *n* cambia su valor.

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

Referencias

[1] E. Kreyszig, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 2 - 3ra Edición, 2003.
[2] Escuela Universitaria de Música de Uruguay, http://www.eumus.edu.uy.
[3] Universidad del País Vasco, http://www.ehu.es.
[4] http://www.monografias.com/trabajos59/los-armonicos/los-armonicos.shtml#ixzz2oh1w9Mtd
[5] G. James, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.
[6] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://en.wikipedia.org/wiki.