El rol de la transformada de Laplace en la suspensión de un automóvil

Alexis Martin Fredes Hadad

Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación
Universidad Nacional del Sur,Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
alefredes_24@hotmail.com
Agosto 2014

Resumen: el objetivo de este trabajo es aprovechar la virtud de la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones diferenciales al trabajar con la suspensión de un automóvil. Para ello se deben tener en cuenta los fenómenos físicos que permiten absorber las irregularidades de la superficie transitada representados a través de una función de transferencia.

Palabras clave: transformada de Laplace, amortiguación, suspensión, función de transferencia.

I. INTRODUCCIÓN

Antes de comenzar con el desarrollo del tema, se explicarán los conceptos básicos para comprender el problema y su solución.

El sistema de suspensión es un conjunto de elementos convenientemente dispuestos en el vehículo, de acuerdo a su construcción estructural y usos para el que se ha diseñado. Este sistema de suspensión puede estar ubicado en el vehículo ya sea entre el suelo y el bastidor o entre el suelo y la carrocería.

El sistema soporta el peso del vehículo permite su movimiento elástico - controlado sobre sus ejes y es el encargado de absorber la energía producida por las trepidaciones del camino para mantener la estabilidad del vehículo, proporcionando mayor confort y seguridad a los pasajeros y/o carga que se transporta.

La suspensión contribuye a mejorar la comodidad y seguridad de marcha y proteger la carga y las piezas del vehículo.

Los movimientos de la suspensión deben amortiguarse por medio de amortiguadores. Decisiva para la comodidad durante la marcha es la aceleración vertical de la carrocería. La sintonía entre suspensión y amortiguación de oscilaciones es un compromiso entre comodidad y seguridad durante la marcha.

Como el comportamiento de la amortiguación es un proceso dinámico (variable en el tiempo) se deben describir ecuaciones diferenciales para poder representarlo matemáticamente.

II. LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN UN SISTEMA DINÁMICO

Un modelo matemático que describe la dinámica de estos sistemas dinámicotienela siguiente forma:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Dónde:a_n y$b_m$son constantes, $u(t)$ es la entrada e $y(t)$es la salida.

Como la función de transferencia analizada se encuentra en un sistema dinámico es menester aplicar la ley de fuerza de Newton para explicar la fuerza neta (referida a la sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre un objeto) que actúa sobre un cuerpo en movimiento. Esta fuerza modificará el estado de movimiento, cambiando la velocidad en modulo o dirección.

En términos matemáticos esta ley se expresa mediante la relación:

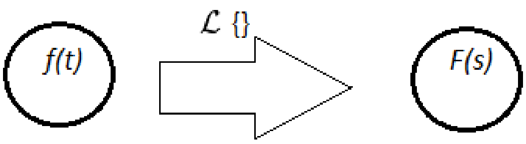
$$\sum F = ma$$

La habilidad para obtener aproximaciones lineales de sistemas físicos permite al análisis considerar el uso de la transformada de Laplace. El método de latransformada de Laplace sustituye por ecuaciones algebraicas de resolución relativamente fácil las ecuaciones diferenciales más difíciles.

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ definida en ecuaciones diferenciales para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función $F(s)$, está definida por:

$$F(s) = £\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

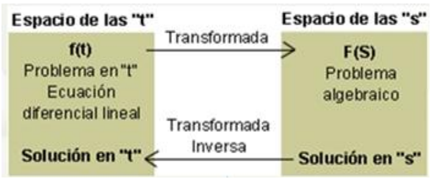
El símbolo £ denota el operador transformada de Laplace; cuando opera en una función $f(t)$ la transforma en una función $F(s)$ de variable compleja *s*. Decimos que el operador transforma la función $f(t)$ en el dominio *t* (también llamado dominio de tiempo) en la función $F(s)$ en el dominio *s* (también llamado dominio de frecuencia). Esta relación está descripta gráficamente en la figura inferior y es usual referirse a $f(t)$ y $F(s)$ como el par de transformadas de Laplace escrito como $\{ f(t), F(s)\}$.



La función original $f(t)$ se conoce como transformada inversa o inversa de *F(s)*, es decir:

$$f(t) = £^{-1}\{F(s)\}$$

La relación entre la transformada y la transformada inversa sería:



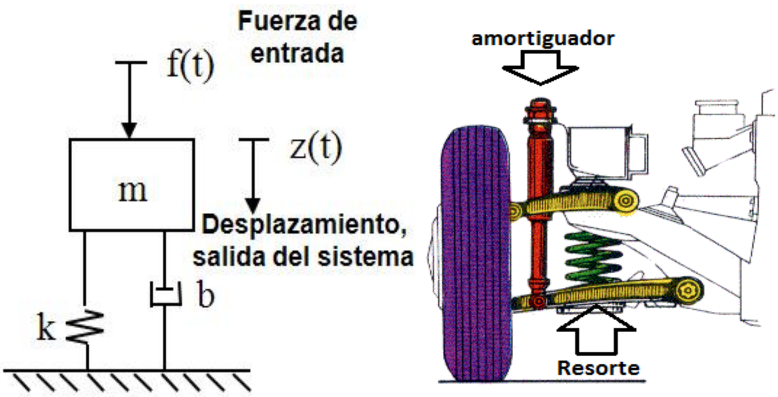
Por definición una función de transferencia se puede determinar según la expresión:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

donde $H(s)$ es la función de transferencia (también notada como $G(s)$); $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta y $X(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de entrada.

III. APLICACIÓN: SUSPENSIÓN DE UN AUTOMÓVIL

Como primera medida debemos analizar las fuerzas que involucran el funcionamiento de la suspensión aplicando la ley de fuerza de Newton:



- k: representa la constante elástica del resorte.
- b: representa el amortiguador.
- $f(t)$: representa la fuerza de entrada.
- $z(t)$: representa el desplazamiento o la salida del sistema.

La fuerza neta quedaría expresada como se detalla a continuación:

$$\sum F = ma$$

$$\underset{1)}{f(t)} - \underset{2)}{kz(t)} - \underset{3)}{b\frac{dz(t)}{dt}} = \underset{4)}{m\frac{d^2z(t)}{dt^2}}$$

Utilizando las propiedades básicas de la transformada de Laplace:

- Linealidad y translación.
- Translación y truncamiento.
- Transformada de la derivada.
- Derivada de la transformada.
- Transformada de la integral.

Linealidad:

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad y \quad L\{g(t)\} = G(s)$$

$$L\{f(t) + cg(t)\} = \{f(t)\} + L\{g(t)\} = F(s) + G(s)$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada término (considerando condiciones iniciales igual a 0):

1) $£\big(f(t)\big) = F(s)$
2) $£\big(kz(t)\big) = k£\big(z(t)\big) = kZ(t)$
3) $£\left(b\ \frac{dz(t)}{dt}\right) = b£\left(\frac{dz(t)}{dt}\right) = bsZ(s)$

4) $£\left(m\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right) = m£\left(\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right) = ms^2Z(s)$

Por lo tanto:

$$F(s) - kZ(t) - bsZ(s) = ms^2Z(s)$$
$$F(s) = Z(s)[ms^2 + bs + k]$$
$$\frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Donde la última ecuación es la función de transferencia buscada.

IV. Conclusión

Para finalizar, podemos concluir que la transformada de Laplace es una herramienta de gran utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales, de manera relativamente sencilla, de un sistema dinámico como lo es la suspensión de un automóvil.

Referencias

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Suspensión_(automóvil), [acceso el 26 de julio de 2014].
[2] Matemática Aplicada para la Técnica del Automóvil H. Kindler – H. Kynast GTZ Editorial Reverté, S.A. Barcelona, España.
[3] G. James, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Pearson Educación, 2002.