

# Transformación de Laplace en Sistemas Dinámicos

## Modelos con Función Transferencia

Alberto Suarez

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación*  
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*  
*magin.suarez@hotmail.com*  
Diciembre 2010

*Resumen:* Como tema principal de la aplicación de la asignatura Funciones de Variable Compleja se eligió la transformada de Laplace, técnica matemática que forma parte de ciertas transformadas integrales, esta definida por medio de una integral impropia y cambia una función en una variable de entrada en otra función en otra variable. La transformada de Laplace es sumamente importante ya que puede resolver ecuaciones diferenciales lineales, con el conocimiento adicional de las condiciones iniciales. La transformada de Laplace puede aplicarse en diferentes procesos de control de la vida cotidiana.

*Palabras clave:* Laplace, modelos, función transferencia

### I. INTRODUCCIÓN.

El tema elegido para la aplicación de la asignatura Funciones de Variable Compleja es la transformada Laplace. La transformada Laplace recibe su nombre en honor del matemático francés Pierre-Simon Laplace, que la presento dentro de su teoría de probabilidad. En 1744, Leonhard Euler había investigado un conjunto de integrales de la forma

$$z = \int X(x)e^{ax} dx \quad (1)$$

$$z = \int X(x)x^A dx \quad (2)$$

como soluciones de ecuaciones diferenciales, pero no profundizó el tema y pronto abandono la investigación. Joseph Louis Lagrange, admirador de Euler, también investigó este tipo de integrales, las ligó a la teoría de la probabilidad en un trabajo sobre funciones de densidad de probabilidad de la forma:

$$\int X(x)e^{-ax} a^x dx \quad (3)$$

que algunos historiadores interpretan como auténticas transformadas de Laplace. Este tipo de integrales atrajeron la atención de Laplace cuando, en 1782, y siguiendo la idea de Euler, trató de emplear estas integrales como soluciones de ecuaciones diferenciales. Parece ser que en 1785 dio un paso más allá, y reenfocó el problema para en vez de usar las integrales como soluciones, aplicarlas a las ecuaciones dando lugar a las transformadas de Laplace tal y como hoy en día se entienden, con la que transformó una ecuación diferencial en una ecuación algebraica de la que buscó su solución.

Pese al logro, las transformadas de Laplace pronto cayeron en un relativo olvido, al haber sido presentadas en el campo de la probabilidad y ser tratadas sobre todo como objetos matemáticos meramente teóricos.

La moderna aplicación de las transformadas de Laplace y toda su teoría subyacente surgen en realidad en la segunda mitad del siglo XIX. Tratando de resolver ecuaciones diferenciales relacionadas con la teoría de vibraciones, el ingeniero inglés Oliver Heaviside descubrió que los operadores diferenciales podían tratarse analíticamente como variables algebraicas. Heaviside publicó sus resultados, cuya utilidad a la hora de resolver ecuaciones de la física y la ingeniería hizo que pronto se extendieran.

Hacia principios del siglo XX, la transformada de Laplace se convirtió en una herramienta muy común de la teoría de vibraciones y de la teoría de circuitos, dos de los campos donde ha sido aplicada con más éxito.

## II. MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS USANDO TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE.

En la actualidad la transformada de Laplace es una herramienta muy importante para matemáticos y físicos, pero también es una herramienta que se aplica a la vida cotidiana aunque no lo notemos. En nuestra vida diaria existen numerosos objetivos que necesitan cumplirse, en el ámbito doméstico controlar la temperatura y humedad de casas y edificios; en transportación controlar que un auto o avión se muevan de un lugar a otro en forma segura y exacta; en la industria controlar un sinnúmero de variables en los procesos de manufactura, etc. Todos estos objetivos son procesos de controles que están asumiendo un papel cada vez más importante en el desarrollo y avance de la civilización moderna y la tecnología. Los sistemas de control se encuentran en gran cantidad en todos los sectores de la industria, tales como control de calidad de los productos manufacturados, líneas de ensamble automático, control de máquinas-herramienta, tecnología espacial y sistemas de armas, etc.

¿Por qué se utiliza Transformada de Laplace en estos procesos?, en el estudio de los procesos es necesario considerar modelos dinámicos, es decir, modelos de comportamiento variable respecto al tiempo, esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferenciales respecto al tiempo para representar matemáticamente el comportamiento de un proceso. Este comportamiento dinámico puede representarse de manera aproximada por el siguiente modelo general de comportamiento dinámico lineal:

$$x(t) = a_0 y(t) + \dots + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} \quad (4)$$

La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil para el análisis de sistemas dinámicos lineales, de echo permite resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas con lo cual se facilita su estudio, y una vez que se ha estudiado el comportamiento de los sistemas dinámicos, se puede proceder a diseñar y analizar los sistemas de control de manera simple.

### A. Aplicación concreta: suspensión de un automóvil.

La suspensión de un automóvil reduce los efectos incómodos de las irregularidades del camino por donde se circule, el objetivo de este sistema es evitar que estas oscilaciones se transmitan a los pasajeros o la carga. Esto se logra a través de un conjunto de uniones elásticas bien elaboradas que constituyen el sistema de suspensión. Durante el movimiento de un vehículo por un camino se pueden producir oscilaciones muy variables en cuanto a amplitud y frecuencia, dependiendo del camino y la velocidad del vehículo. Los sistemas de suspensión de los automóviles se diseñan especialmente para amortiguar lo mayor posible las oscilaciones más perjudiciales y tratan a su vez de minimizar el efecto de todas las otras. En la figura 1 se observa el diagrama de la suspensión.

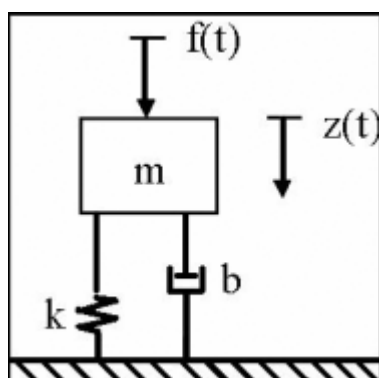


Figura 1. Diagrama de la suspensión de un automóvil,  $f(t)$ : fuerza de entrada,  $z(t)$ : salida de entrada (desplazamiento).

Realizando sumatoria de fuerzas nos queda:

$$\sum F = ma$$

$$f(t) - kz(t) - b \frac{dz(t)}{dt} = m \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada termino (considerando condiciones iniciales igual a cero)

$$F(s) - kZ(s) - bsZ(s) = ms^2 Z(s)$$

$$F(s) = Z(s)[ms^2 + bs + k]$$

$$\frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = h(s) \rightarrow \text{Función de transferencia}$$

La función de transferencia,  $h(s)$ , representa el comportamiento dinámico del proceso. Nos indica como cambia la salida de un proceso ante un cambio en la entrada. Se representa gráficamente en un diagrama de bloques como se muestra en la figura 2.

$$h(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{Cambio en la salida del proceso}}{\text{Cambio en la entrada del proceso}}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{Respuesta del proceso}}{\text{Función forzante}}$$

En la figura 2 se observa un esquema del diagrama de bloques en un proceso genérico y el caso particular la suspensión de un automóvil.

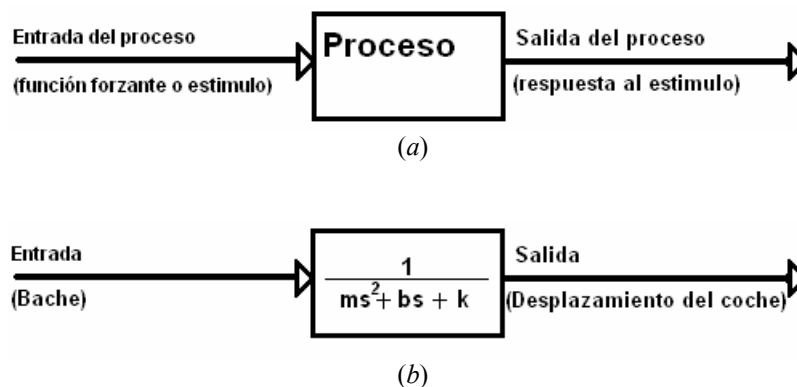


Figura 2: (a) Proceso genérico; (b) Suspensión de un automóvil.

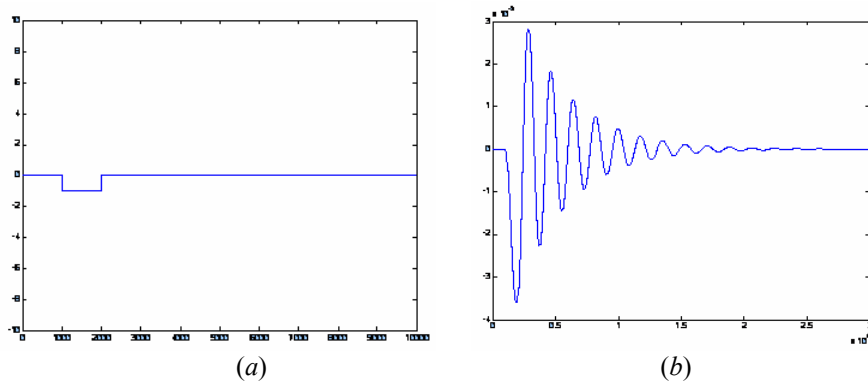


Figura 3: (a) Entrada (Bache); (b) Salida (Desplazamiento).

Estos modelos pueden ser utilizados para obtener la respuesta al estímulo, salida del proceso usando antitransformada. Además, se pueden utilizar las funciones transferencia en los programas de simulación numérica, para obtener la salida del proceso en forma numérica. (Matlab-Simulink) como se muestra en la figura 3, los diagramas asociadas a la entrada o bache y a la salida o desplazamiento.

### III. CONCLUSIONES.

La transformada de Laplace fue seleccionada como tema principal de este informe ya que puede aplicarse en diferentes procesos de control de la vida; como se vio permite resolver ecuaciones diferenciales, que a su vez puede obtener el comportamiento de una suspensión de un automóvil y a muchas otras cotidianas.

### REFERENCIAS

- [1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada\\_de\\_Laplace](http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace), [acceso: diciembre 2010]
- [2] WikiMatemática, *Aplicaciones de la transformada de laplace*, [internet], disponible en: [http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Aplicaciones\\_de\\_la\\_transformada\\_de\\_laplace](http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Aplicaciones_de_la_transformada_de_laplace); [acceso: diciembre 2010]
- [3] Slideshare, *Aplicaciones reales de la transformada de Laplace*, [internet], disponible en: [http://www.slideshare.net/ptah\\_enki/laplace-349511](http://www.slideshare.net/ptah_enki/laplace-349511); [acceso: diciembre 2010]