Aplicación de fasores en la Ingeniería eléctrica y el plano complejo

Agustín Salvador Rodríguez

Estudiante de Ingeniería Electricista
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Agustin_uns@hotmail.com

Junio 2015

Resumen: El uso de fasores aporta increíbles ventajas para la resolución de fórmulas en el campo de la Ingeniería Eléctrica. En el siguiente informe se definirá el concepto fasor y su representación gráfica en el plano complejo. También se revelaran algunas aplicaciones útiles de este método, como la resolución de circuitos RLC y la implementación en un oscilador armónico. Se mostrara la relación existente entre variables complejas con magnitudes eléctricas para la facilitación de cálculos, y brevemente se describirá el uso de fasores en otras ramas, como en óptica, acústica, e ingeniería de las telecomunicaciones. Finalmente se cerrara el tema con una conclusión final.

Palabras clave: fasor, compleja, aplicaciones, circuitos, armónico.

I. Introducción

La corriente alterna se suele representar con un vector girando a la velocidad angular ω. Este vector se suele denominar fasor. Los fasores pueden representarse mediante números complejos teniendo una componente real y otra imaginaria, pudiéndose notar de manera binómica o polar según lo exija el problema. La constante relación con la función senoidal, permite resolver y analizar fácilmente ondas y circuitos de corriente alterna, como también el movimiento armónico.

II. Expresión de fasores

Como dijimos anteriormente, la notación fasorial es aplicable para la representación de amplitudes y fases en oscilaciones. Su función senoidal se ve expresada de la siguiente forma:

$$z(t) = Asen(\omega t + \theta) \quad (1)$$

Siendo:

- z (t) la magnitud que oscila con el tiempo.
- A la amplitud de la sinusoide.
- ω frecuencia angular dada por ω =2πf siendo f la frecuencia.
- t el tiempo.
- θ el ángulo de fase de la sinusoide.

Mediante la identidad de Euler podemos encontrar una relación entre las funciones trigonométricas y un fasor. Esta relación se distingue de la siguiente manera:

$$e^{i\emptyset} = cos\emptyset + jsen\emptyset \quad (2)$$

Siendo el sen (∅) la parte imaginaria del fasor, y cos (∅) su parte real.

También notemos que ∅= ωt +θ.

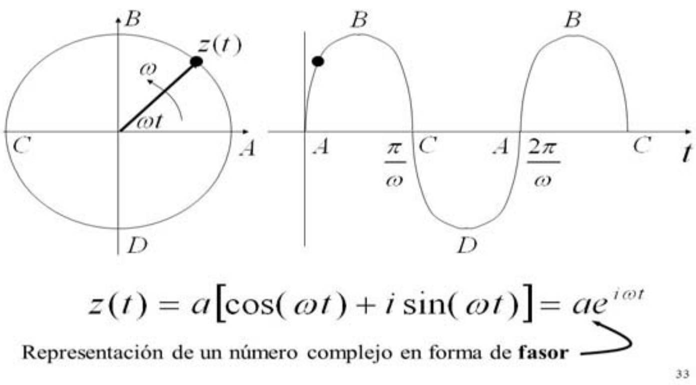

Figura 1

III. Resolución de circuito RLC

Supongamos que nutrimos el siguiente circuito con un voltaje oscilatorio $V = V_{max}\cos(\omega t)$ de la siguiente manera:

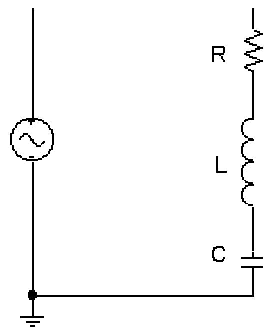

Figura 2

Es de suponer que las magnitudes eléctricas que se encontraran serán de las siguientes maneras:

$$I = I_{max}\cos(\omega t + \Theta) \quad (4)$$

La corriente, siendo I_{max} la corriente máxima, y Θ la fase por los efectos de atraso y adelanto de la señal de voltaje causado por los elementos del circuito (las tensiones y corrientes se encuentran en distintas fases en un determinado momento):

El siguiente grafico representa un diagrama fasorial, en donde podemos decir que la tensión y la corriente presentan distintas fases como dijimos anteriormente:

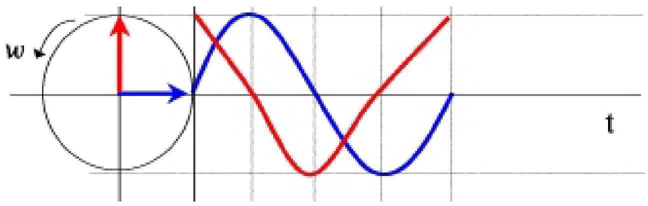

Figura 3

La siguiente expresión muestra la corriente de manera fasorial:

$$I = I_{max}e^{j(\omega t+\theta)} \quad (5)$$

Aplicando la identidad de Euler llegamos a:

$$I = I_{max}\big(\cos(\omega t + \theta) + jsen(\omega t + \theta)\big) \qquad (6)$$

Repasando las caídas de tensiones en el circuito tenemos:

Caída de tensión en el inductor:

$$V = \frac{Ldi}{dt} \quad (7)$$

Caída de tensión en la resistencia:

$$V = RI \quad (8)$$

Caída de tensión en el capacitor:

$$V = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int I\,dt \quad (9)$$

Otras relaciones a tener en cuenta para circuitos RLC son las siguientes:

La impedancia determinada por la resistencia R y la reactancia x:

$$Z = R + jx \quad (10)$$

La corriente total por el voltaje de la fuente y la impedancia Z:

$$I = \frac{V}{Z} \quad (11)$$

Ya teniendo en cuenta las mencionadas ecuaciones podemos pasar a la resolución del circuito.

Derivando (5) en función del tiempo y reemplazando en (7) llegamos a la caída de tensión en el inductor como:

$$V = LI_{max}e^{j(\omega t+\theta)}j\omega \quad (12)$$

La caída de la tensión en la resistencia queda igual que en (8):

$$V = RI$$

Para la caída en el capacitor integramos (5) en función del tiempo y reemplazamos en (9):

$$V = -\frac{j}{\omega c}I_{max}e^{j(\omega t+\theta)} \quad (13)$$

Con la caída de tensiones expresadas fasorialmente podemos encontrar la impedancia:

$$Z = RI + j\left(LI_{max}e^{j(\omega t+\theta)}\omega - \frac{1}{\omega c}I_{max}e^{j(\omega t+\theta)}\right) \quad (14)$$

Finalmente a partir de (11) hallamos la corriente:

$$I = (V_{max}\cos(\omega t))\frac{1}{RI + j\left(LI_{max}e^{j(\omega t+\theta)}\omega - \frac{1}{\omega c}I_{max}e^{j(\omega t+\theta)}\right)} \quad (15)$$

IV. Movimiento armónico simple

La gran ventaja de trabajar con variable compleja es la simplificación de cálculos, ya sean derivadas o integrales de forma trigonométrica. Una de las tantas aplicaciones es la del movimiento armónico. A través de la posición de una partícula en forma fasorial podemos llegar rápida y sencillamente a la velocidad y su aceleración. Veamos cómo se aplica:

$$x = Re(Ae^{j\omega t}) \quad (16)$$

Derivando obtenemos la velocidad:

$$\dot{x} = Re(Aj\omega e^{j\omega t}) \quad (17)$$

Derivando nuevamente la aceleración:

$$\ddot{x} = Re\left(A(j\omega)^2 e^{j\omega t}\right) \quad (18)$$

Aquí claramente podemos verificar la sencillez de cálculo con fasores, los cuales convierten derivadas en multiplicaciones. Esto quiere decir, que para calcular el fasor de la derivada de una magnitud, solo necesitamos multiplicar dicha magnitud por jω.

V. Óptica, acústica, e ingeniería de las telecomunicaciones

Las ondas presentes en óptica, acústica y telecomunicaciones, también se ven representadas sencillamente de forma vectorial. Por ejemplo, los mensajes telefónicos se vuelven una serie de ondas, las cuales chocan en diversos lugares trasladándose por cables y antenas llegando a su destino. Sus ventajas son las mismas, si trabajamos con una sola frecuencia y el sistema es lineal, entonces todas las señales serán a esa frecuencia, y tendremos que trabajar con amplitudes y desfasajes.

VI. Conclusión

En esta nota de aplicación de variable compleja, se intenta familiarizar al lector en el uso de fasores para la resolución de fenómenos físicos y eléctricos. Observamos la versatilidad de cambiar funciones trigonométricas por complejos, para resolver circuitos RLC y movimiento armónico simple.

REFERENCIAS

[1] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Fasor, [acceso el 25 de mayo de 2015].
[2] La Función Exponencial. Los Fasores. [internet], disponible en Http: //delibes.tel.uva.es/tutorial_cir/tema5/fasores.html, [acceso el 25 de mayo de 2015].
[3] Luis Serrano Iribarnegaray, Teoría de los fasores espaciales: introducción y aplicaciones espaciales.
[4] Aplicación de circuitos eléctricos, [internet], disponible en Http: //aplicaciondecircuitoselectricos1.blogspot.com.ar/2011/11/fasores_26.html, [acceso el 26 de mayo de 2015].
[5] Física práctica, [internet], disponible en http://www.fisicapractica.com/fasores.php, [acceso el 10 de agosto de 2015].
[6] Universidad de Sevilla, [internet], http://laplace.us.es/wiki/index.php/Fasor, [acceso el 10 de agosto de 2015].