Trasformada de Laplace: Estabilidad y control

Agustín N. Campo Kihn

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Agustin.campo.kihn@gmail.com

Marzo 2015

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo dar a conocer cómo la Transformada de la Laplace se aplica en métodos dinámicos, precisamente como podemos usarla como herramientas para obtener un modelo matemático y así entender y dominar el control y la estabilidad de cualquier sistema dinámico lineal.

Palabras clave: Trasformada de Laplace, Estabilidad, FeedBack, control, función trasferencia .

I. INTRUDUCCION

Los sistemas dinámicos suelen ser sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales o a perturbaciones externas. Produciendo desviaciones en el comportamiento futuros. Para eso se debe aplicar soluciones para su estabilización, las funciones de control, y así poder intensificar el funcionamiento del proceso.

Para esto se debe poder manejar un modelo matemático del sistema a tratar, los cuales poseen comportamientos variables en el tiempo y gracias a la trasformadas de Laplace podremos manipularlas como ecuaciones algebraicas de variable compleja.

II. FUNCION DE TRASFERENCIA

Para representar el sistema lineal se implementara una función de trasferencia., Pero ¿Qué es una función de trasferencia? Una función de transferencia es un modelo matemático que a través de un cociente relaciona la respuesta de un sistema con una señal de entrada. En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada y salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo. Se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son nulas.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{1}$$

La utilidad esencial de la transformación de Laplace reside en su propiedad de convertir ecuaciones diferenciales lineales (en la variable tiempo t) en ecuaciones algebraicas (en la variable complejas).

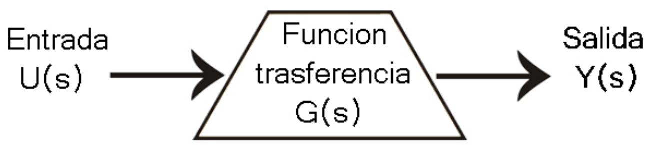

Figura 1 – *f:* trasferencia

La salida en frecuencia del sistema es

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \textbf{(2)}$$

Pero si queremos obtener nuestra función de salida en función de tiempo se aplica la anti-trasformada

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]. \quad \textbf{(3)}$$

La función G(s) es representada como el cociente entre 2 polinomios, la cual ordenada de la forma que se mostrara abajo sus polos y ceros podrían ser claramente visibles

$$G(s) = \frac{n(s-z_1)\dots(s-zi)}{(s-p_1)\dots(s-pi)} \quad \textbf{(4)}$$

Para el análisis de la estabilidad de los polos se utilizan funciones de trasferencia

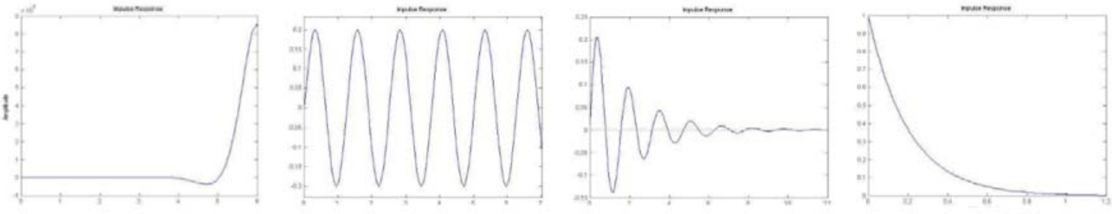

Figura 2- Respuesta de los polos al usar una entrada tipo impulso

Los polos están directamente ligados a la estabilidad del sistema. Aplicando la transformada inversa de Laplace de un polo simple tiene forma de exponencial tal que $y(t) = \alpha e^{at}$. La transformada inversa de Laplace de un par de polos complejos tiene forma senoidal amortiguada.
$y(t) = \alpha e^{at}\sin(bt)$. En estos casos a es la parte real del polo y b la parte compleja. Al ser exponenciales se ve directamente que si el valor del polo es positivo la respuesta tiende a infinito, por lo que es inestable.

III. AMORTIGUAMIENTO

Se define la forma de los polos complejos, para obtener un polinomio de segundo orden:

$$G(s) = \frac{k}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2} \quad \textbf{(5)}$$

Donde $\omega_n$es la frecuencia natural del sistema y ς el coeficiente de amortiguamiento.
En la resolución de los polos para esa expresión de G.

$$\boldsymbol{P} = \frac{-2\omega_n \pm \sqrt{4\varsigma^2-4\omega_n^2}}{2} = -\varsigma\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\varsigma^2-1} \quad \textbf{(6)}$$

El coeficiente de amortiguamiento es quien condiciona el comportamiento y la respuesta del sistema, y se debe evaluar los diferentes valores posibles de ς.

Caso 1 - sobreamortiguado: cuando $\varsigma > 1$. La parte de la raíz de la excreción es positivo, los polos son reales.

$$Y(s) = \frac{k}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{k}{(s-p_1)(s-p_2)} = k(\frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2}) \qquad \textbf{(7)}$$

La anti trasformada de Laplace.

$$y(t)P = k(Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}) \qquad (8)$$

Caso 2 – críticamente amortiguado: cuando $\varsigma = 1$

$$Y(s) = \frac{k}{s^2+2\omega_n s+\varsigma\omega_n^2} = \frac{k}{(s+\omega_n)} = (\frac{A}{(s+\varsigma\omega_n)^2} + \frac{B}{(s+\omega_n)}) \qquad (9)$$

Su anti trasformada de Laplace será.

$$y(t) = k(At + B)e^{-w_n t} \qquad (10)$$

Caso 3 –sub amortiguado: cuando $1 < \varsigma < 0$

$$Y(s) = \frac{k}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\varsigma\omega_n^2} = \frac{k}{(s+\varsigma\omega_n)^2+\omega_n^2(\varsigma^2-1)} \qquad (11)$$

Aplicando la anti Trasformada de Laplace.

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} e^{-2\varsigma\omega_n} sen\left(\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2 t}\right) \qquad (12)$$

Control

Habiendo explicado el control de un sistema ahora se verá cómo conseguir cambiar los polos de su posición inicial. Para ello se introduce lo que es una herramienta fundamental tanto en control como la realimentación.

III. REALIMENTACION

Es un mecanismo por el cual una cierta proporción de la salida de un sistema se redirige a la entrada, con objeto de controlar su comportamiento. Se produce cuando las salidas del sistema o la influencia de las salidas del sistema en el contexto, vuelven a ingresar al sistema como recursos o información. La realimentación permite el control de un sistema y que el mismo tome medidas de corrección con base en la información realimentada.

El bloque H(s) es la función de transferencia de la mediación de la salida de Y(s). Se considerará H(s) = 1. La ganancia K se encarga del control de la realimentación.

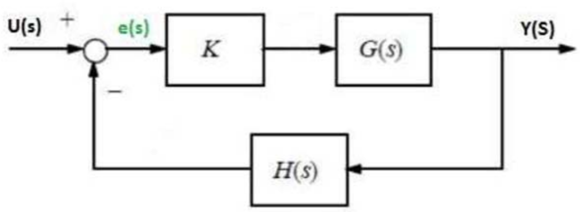

Figura 3- Esquema de realimentación

IV. CONCLUSION.

Durante la realización de esta nota de aplicación pude ver como los contenidos de la materia que en un principio me parecieron abstractos son herramientas fundamentales para la solución de problemas con aplicaciones totalmente reales, los conocimientos adquiridos permite leer artículos que tratan temas que considero complejos (“Estabilización de aeronave”, “Circuitos eléctricos”, “Vibraciones”, etc.) entendiendo los pasos que toman.

La trasformada de Laplace es un mecanismo muy valeroso, ya que facilita drásticamente la resolución de ecuaciones, en especial las ecuaciones diferenciales.

En el momento de elegir una aplicación Control es el tema que más me intereso, y no se explicó para una situación específica, porque creí que la generalización permitiría ver la gran utilidad en variados sistemas

REFERENCIAS

[1] Tnte. Jaramillo Enríquez Luis Santiago, “Análisis vibracional de un avión no tripulado (RPV)”, disponible en http://repositorio.espe.edu.ec/bitstream/21000/666/1/T-ESPE-014419.pdf [acceso el 12 de marzo de 2015].

[2] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], Regulación Automática, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Regulación_automática[acceso el 10 de marzo de 2015].

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], Realimentación, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Realimentaci%C3%B3n [acceso el 10 de marzo de 2015].

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], Función de trasferencia, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_transferencia [acceso el 10 de marzo de 2015].

[5] Oscar Vila Rovira, “Modelización de aeronaves no tripuladas con Simulink”, disponible en http://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/12919/1/memoria.pdf [acceso el 11 de marzo de 2015].

[6] ”Respuesta al Escalón en Matlab” http://www.ib.cnea.gov.ar/~instyctl/Tutorial_Matlab_esp/step.html [acceso el 12 de marzo de 2015].