Uso de Fasores

Adrián Gago

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
Adrian_amg_13@hotmail.com
Agosto 2011

Resumen: En este informe se mencionará una aplicación a la Ingeniería de temas contenidos en la asignatura Funciones de Variable Compleja. Una breve explicación de los fasores, y dos casos particulares de implementación de estos en forma de ejemplo. El primero, el uso de fasores en un oscilador armónico y el segundo, en la resolución de un circuito RLC.

Palabras clave: fasor, circuito, onda.

I. INTRODUCCIÓN

Un fasor es un vector utilizado para representar una onda, de forma que el vector suma de varios fasores puede ser utilizado para determinar la magnitud y fase de varias ondas después de procesos de interferencia. Los fasores se utilizan directamente en óptica, ingeniería de telecomunicaciones y acústica. La longitud del fasor da la amplitud y el ángulo entre el mismo y el eje-*x* la fase angular. Debido a las propiedades de la matemática de ondas, en electrónica los fasores se utilizan habitualmente en el análisis rudimentario de circuitos en corriente alterna. Finalmente, los fasores pueden ser utilizados para describir el movimiento de un oscilador. Las proyecciones del fasor en los ejes *x* e *y* tiene diferentes significados físicos.

II. APLICACIÓN AL CASO DE UN OSCILADOR FORZADO

Un ejemplo en el que la solución empleando fasores es mucho más simple que la que usa funciones trigonométricas es el caso de un oscilador armónico con rozamiento sometido a una fuerza oscilante.

Suponemos un oscilador armónico unidimensional, de constante *k*, masa *m* y coeficiente de rozamiento viscoso *b*. Se trata de ver cómo se mueve este oscilador cuando se encuentra sometido a una fuerza

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{F}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)_{\tilde{F} = F_0}$$

La ecuación de movimiento para la partícula es

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos(\omega t)$$

o, en términos de la posición,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

Tras un periodo transitorio inicial, el movimiento de la partícula se reduce a oscilaciones siguiendo a la fuerza, con la misma frecuencia, pero con un posible desfase

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

Para encontrar la amplitud y desfase de este movimiento oscilatorio, escribimos la ecuación la ecuación en forma fasorial, reemplazando las derivadas por multiplicaciones por jω. Nos queda la ecuación algebraica

$$-m\omega^2\tilde{x} + \mathrm{j}b\omega\tilde{x} + k\tilde{x} = \tilde{F}$$

De aquí despejamos el fasor de la posición

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{F}}{(k - m\omega^2) + \mathrm{j}\omega b}$$

Esta ecuación nos da la amplitud de las oscilaciones

$$A = |\tilde{x}| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}}$$

y el desfase respecto a la fuerza aplicada

$$\phi = \arg(\tilde{x}) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega b}{k - m\omega^2}\right)$$

III. APLICACIÓN PARA EL CASO DE UN CIRCUITO RLC:

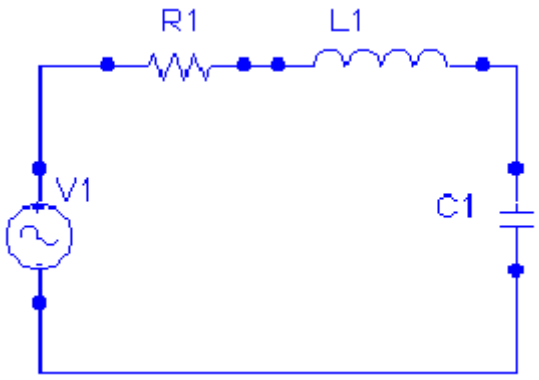

Figura 1: Circuito RLC.

Encontraremos por ejemplo que son y para que sirvan, definiciones tales como reactancia inductiva y capacitiva, frecuencia de resonancia, resonancia, factor de potencia etc.

En la mayoría de las aplicaciones que tienen los capacitores e inductores en los circuitos tienen que ver la variación voltaje y la corriente respecto al tiempo que generan estos dos elementos. En este caso vamos a analizar un circuito en el cual vamos a colocar dichos elementos en serie con una resistencia conectados a una fuente de voltaje de CA que está en fase con la corriente. Supongamos que el voltaje aplicado varía senosoidalmente con el tiempo:

$$v = Vm * sen\omega t$$

mientras que la corriente varía:

$$i = \mathrm{Im} * sen(\omega t - \phi)$$

Donde ϕ es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado, donde nuestro objetivo es determinar ϕ e Im.

Con el fin de resolver este problema, debemos analizar el diagrama de fasores para este circuito. En primer lugar, advierta que debido a que todos los elementos están en serie, la corriente en cualquier punto del circuito debe ser la misma en cualquier instante. Por consiguiente en las secciones previas, el voltaje a través de cada elemento tiene diferentes amplitudes y fases.

En particular, el voltaje a través del resistor está en fase con la corriente, el voltaje a través del inductor adelanta la corriente 90°, y el voltaje a través del capacitor va retrasado de la corriente en 90°. Utilizando estas relaciones de fase, podemos expresar las caídas de voltaje instantáneas a través de los tres elementos como:

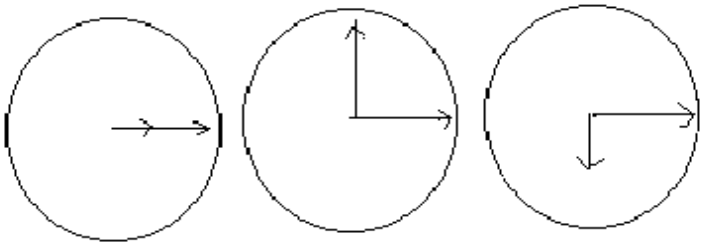

Figura 2: Diagrama fasorial.

$$vr = \mathrm{Im}^* Rsen\omega t$$
$$vl = \mathrm{Im}^* Xlsen(\omega t + 90°)$$
$$vc = \mathrm{Im}^* Xcsen(\omega t - 90°)$$

En este punto, podríamos continuar notando que el voltaje instantáneo a través de los tres elementos es igual a la suma:

$$v = vr + vl + vc$$

Debido a que la corriente en cada elemento es la misma en cualquier instante, podemos obtener el diagrama de fasores resultante combinando los tres pares de fasores mostrados. Para obtener la suma vectorial de estos voltajes, es conveniente dibujar un diagrama de fasores como se muestra en la figura 2.

De acuerdo con este diagrama, vemos que la suma vectorial de las amplitudes de voltaje vr, vl, vc es igual a un fasor cuya longitud es el máximo voltaje aplicado Vm, donde el fasor Vm forma un ángulo ϕ con el fasor de corriente Im. Obsérvese que los fasores de voltaje están en direcciones opuestas a lo largo de la misma línea, por lo que podemos construir un fasor de diferencia $vl - vc$ la cual es perpendicular al fasor vr .
Según él triangulo rectángulo en la figura vemos que:

$$Vm = \sqrt{vr^2 + (vl - vc)^2} = \sqrt{(\mathrm{Im}R)^2 + (\mathrm{Im}Xl - \mathrm{Im}Xc)^2}$$
$$Vm = \mathrm{Im}^* \sqrt{R^2 + (Xl - Xc)^2}$$

Por lo tanto, podemos expresar la corriente máxima como:

$$\mathrm{Im} = \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + (Xl - Xc)^2}}$$

dado que la impedancia del circuito se define como:

$$Z = \sqrt{R^2 + (Xl - Xc)^2}$$

donde la impedancia está dada en ohms por tanto, podemos escribir la ecuación la ecuación como:

$$Vm = \mathrm{Im}^* Z$$

En donde esta es la ecuación general para un circuito de CA Eliminando el factor común Im de cada fasor, podemos construir un triangulo de impedancia. A partir de este diagrama encontramos que él triangulo de fase entre la corriente y el voltaje es:

$$\tan \phi = \frac{Xl - Xc}{R}$$

IV. CONCLUSIÓN:

En este breve informe se trata de dar una pequeña introducción al uso de fasores, en problemas relacionados con la electricidad y la electrónica. Observando en el mismo que con la implementación de los fasores se pueden simplificar expresiones complejas, como pueden ser ecuaciones diferenciales, en simples cálculos. Como se ve en el caso de la ecuación diferencial del oscilador armónico y el cálculo de la impedancia de circuito RLC.

REFERENCIAS

[1] Departamento de Física Aplicada III. Universidad de Sevilla. http://laplace.us.es/wiki/index.php/Fasor.

[2] Foros de Electrónica, Comunidad Internacional de Electrónicos. http://www.forosdeelectronica.com/tutoriales/RLC.htm

[3] Wikipedia, *La enciclopedia* libre, disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Fasor