

VIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control

RPIC 99

Volumen I

**23- 25 de Septiembre de 1999
Mar del Plata**

**Departamento de Electrónica
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Mar del Plata**

**J. B. Justo 4302 - CP. 7600 Mar del Plata
Tel. +54 - 223 - 481 6600
[http:// fi.mdp.edu.ar](http://fi.mdp.edu.ar)**

Comisión Organizadora

Presidente

Mario Bendetti

Co-presidente

Virginia Ballarin

Secretario Académico

Daniel Carrica

Secretario de Finanzas

Claudio Gonzalez

Acreditaciones

Hilda Larrondo

Publicaciones

Emilce Moler

Infraestructura

Isabel Passoni

Medios Tecnológicos

Gustavo Uicich

Organización general

Jorge Castiñeira
Juana Fernandez
Gloria Frontini
Monica Liberatori
Santiago Urquiza

Colaboración especial

Gustavo Meschino
Mauricio Tulli
Betty Antón

Network Implementation.
Lew S., Cernuschi Frías B., *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Buenos Aires.* 13-8

Sublattices in the Class of the Fuzzy Consequence Operators Sublattices in the Class of the Fuzzy Consequence Operators.
Elorza J., Burillo P., *Dpto. de Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra, España.* 61-8

A Neural Network Approach for Surface Interpolation Intended for CNC Machines.
Canali L., Modesti M., Destéfanis E., Lopensino J., *Grupo de Investigación en Informática para Ingeniería, UTN. Facultad Regional de Córdoba.* 23-8

SLNL-1

Sistemas Lineales- No Lineales

Visualización de Atractores en Sistemas Continuos y Discretos.
Moiola J., *Dpto. de Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional del Sur.* 34-10

Control de Bifurcaciones en Sistemas Realimentados.
Moiola J., Chen G., *Dpto. de Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional del Sur y Department of Electrical & Comp. Engineering, University of Houston, USA.* 44-10

Optimización de sistemas con restricciones utilizando Programación Dinámica Iterativa.
Fullana R., Schugurensky C., *Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan.* 11-10

Un ambiente computacional para la modelización de sistemas dinámicos no lineales con Bond Graphs.
Kofman E., Junco S., *Dpto. de Electrónica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario.* 16-10

Non-Linear Total Least Squares to Estimate Tangent Maps and Lyapunov Spectra.
Orda C., Belaustegui Goitia C., *Instituto de Ingeniería Biomédica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Buenos Aires.* 40-10

SC-5

Sistemas de Control

On the Global Convergence of non Linear Nonconvex Estimators.
Jordán M., Bambill H., *Dpto. de Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional del Sur.* 113-9

Control paramétrico de un péndulo subactuado.
Alonso D., Paolini E., Moiola J., *Dpto. de Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional del Sur.* 188-9

Diseño de controladores no lineales usando funciones de Lyapunov lineales a tramos.
Guivant J., Masson F., Calandrini G., *Dpto. Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional del Sur.* Pag.
176-9

Estabilidad de una clase de sistemas con perturbación singular.
Etchechoury M., Muravchik C., *LEICI. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata.* 215-9

Flexible Operation through Optimal Tracking in Nonlinear Processes.
Constanza V., Neuman C., *Dpto. de Matemática, FIQ. Universidad Nacional del Litoral.* 9-9

Diseño de controladores no lineales usando funciones de Lyapunov Lineales a Tramos

José E. Guivant *, Favio R. Masson **, Guillermo L. Calandrini*

*Dto. Ingeniería Eléctrica – Universidad Nacional del Sur – CONICET
Av. Alem 1253 (8000) Bahía Blanca – Argentina
calandri@criba.edu.ar, jguivant@criba.edu.ar

**Dto. Ingeniería Eléctrica – Universidad Nacional del Sur
fmasson@criba.edu.ar

Resumen: En este trabajo se presenta un método constructivo de funciones de Lyapunov con el fin de diseñar un controlador no lineal. El método utiliza funciones de Lyapunov continuas, lineales a tramos, lo que permite obtener una solución numérica al problema. La síntesis de las funciones de Lyapunov y de las leyes de control son resueltas por medio de algoritmos de Programación Lineal.

Abstract: In this work, a constructive method of Lyapunov functions is presented, with the purpose of design a no linear controller. The method uses piecewise linear Lyapunov functions, then it is possible to obtain a numerical solution of the problem. The synthesis of the Lyapunov and the control functions are solved by means of Lineal Programming.

Palabras clave: Lyapunov, atractividad, programación lineal, lineal a tramos, control.

1. Introducción

El método de Lyapunov se originó como una herramienta de análisis de estabilidad. Luego surgieron técnicas de control realimentado, que se basan en la idea de diseñar una ley de control de tal manera que una función de Lyapunov V , o más específicamente la derivada de dicha función, tenga ciertas propiedades que garantizan el seguimiento de trayectorias y la convergencia a puntos de equilibrio o conjuntos de equilibrio.

El problema fundamental de estos procedimientos radica esencialmente en la elección de esta función V .

El objetivo de diseño de control desarrollado en este trabajo es conducir un sistema no lineal a una cierta región. Es decir que no se lo lleva a un punto de operación, sino a un conjunto de puntos donde, luego se puedan utilizar controladores locales, como por ejemplo controles lineales.

La acción de control utilizada consiste en un conjunto de valores admisibles que pueden ser fijos, o funciones de los estados del sistema. Con un procedimiento constructivo se determina en forma conjunta la función de Lyapunov y la

región de aplicación para cada acción de control. Se utilizan funciones continuas lineales a tramos, y el método propuesto parametriza todas estas posibles funciones de n variables reales. El planteo de esta manera conduce a resolver varios problemas de programación lineal, donde en cada paso se incrementa la región de aplicación de la acción de control.

En la sección 2 se detallan nociones básicas de representación lineal a tramos y la definición de región de atractividad considerada en este trabajo. En la sección 3 se muestra la obtención de la región de atracción en el caso de un sistema autónomo y luego en forma iterativa para sistemas no autónomos. El planteo del problema con funciones lineales a tramos se desarrolla en la sección 4, y también su solución que se traduce a varios problemas de programación lineal construyéndose el algoritmo de diseño de la ley de control. En la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo, y por último en el apéndice se prueban los lemas utilizados en las secciones anteriores.

2. Nociones Preliminares

2.1. Región Atractiva

En este trabajo se consideran regiones de atracción como una extensión de la noción básica de punto de equilibrio atractivo. El objetivo es que en tiempo finito el sistema entre en una región denominada *atractiva*.

Definición 1: En el sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (1)$$

se dice que una región $A \subset C \subset \mathcal{R}^n$ es *atractiva*, si existe otra región B (*región de atracción*), $B \subset C$, $A \cap B = \emptyset$ y $\forall z \in B \exists T > 0$ tal que $x(z, T) \in A$

Es decir, dada cualquier condición inicial perteneciente a la región B , entonces en algún tiempo finito T , el estado del sistema alcanza el contorno de la región A .

2.2. Representación Lineal a Tramos

Se da a continuación una breve descripción de la representación lineal a tramos (LAT) con partición simplicial.

Considérese un dominio compacto rectangular de la forma

$$\bar{D} = \{ (x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_i \leq m_i \cdot \delta_i, i \in \{1, n\} \} \quad (2)$$

donde $m_i \in \mathbb{Z}_+$ y cada valor δ_i corresponde al paso de la grilla en la variable x_i .

Esta región está particionada por una partición simplicial H , determinada por el conjunto de hiperplanos

$$\begin{cases} x \in \mathcal{R}^n / x_q - k_q \delta_q = 0 \\ x \in \mathcal{R}^n / x_i - (x_j - k_j \delta_j) = 0 \\ x \in \mathcal{R}^n / (x_i - k_i \delta_i) - x_j = 0 \end{cases} \quad (3)$$

donde $q \in \{1, n\}$,

$$k_r \in \{1, m_r - 1\},$$

$$j \in \{i+1, n\} \quad \forall i \in \{1, n-1\}$$

Se demostró en Julian (1998a), que el conjunto de todos los mapeos LAT : $S \rightarrow \mathcal{R}^n$, con una partición fija, es un espacio vectorial lineal. Se denota $PWL_D[H]$ al espacio de las funciones LAT definidas sobre \bar{D} con la partición (3). Una función arbitraria que pertenece a este espacio vectorial se define $A \subset C \subset \mathcal{R}^n$ unívocamente especificando su valor en los vértices de la partición H .

La partición simplicial divide al dominio D en simples propios de $n+1$ vértices de tal manera que $\bar{D} = \bigcup_i \bar{S}_i$. Se notará en adelante $p_j^{(i)}$ al j -ésimo vértice del simple S_i . Se denominará

$vert(S_i)$ al conjunto de los vértices del simple S_i .

Dada una función no lineal $g: \bar{D} \rightarrow \mathcal{R}^n$, se define la aproximación LAT de g , de acuerdo con Chien (1977), como

$$g_p(p) = g(p) \quad (4)$$

$$\forall p \in vert(S_i), \quad \forall i / S_i \subset \bar{D}$$

Esta aproximación tiene la propiedad de satisfacer

$$\|g(x) - g_p(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in S \quad (5)$$

$$\varepsilon = \max_{S_i \subset S} \max \{ \|g(x_1) - g(x_0)\| \}, \quad x_0, x_1 \in S_i \quad (6)$$

3. Diseño de una ley de control estabilizante

Antes de presentar el diseño de la ley de control estabilizante para un sistema del tipo:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^m \quad (7)$$

se analiza a continuación un sistema autónomo. Como veremos, la solución del problema resulta similar al objetivo planteado en el trabajo y por lo tanto es natural la extensión del problema autónomo a otro no autónomo.

3.1. Sistema autónomo

Dado un sistema autónomo del tipo:

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (8)$$

y las siguientes regiones en \mathcal{R}^n

$$C \subset \mathcal{R}^n, \quad A \subset C, \quad (9)$$

deseamos encontrar una región B tal que:

$$B \subset C - A \quad (10)$$

y además que la región A resulte atractiva sobre la región B . Para asegurar esto, es condición suficiente que exista una función Lyapunov $V(x)$, $x \in B$, que sea continua y que cumpla las siguientes condiciones:

$$D_f^+ V < -\gamma < 0, \quad \forall x \in C - A$$

$$\min_{z \in \partial A} (V(z)) < \min_{y \in \partial C} (V(y)) \quad (11)$$

Si se cumplen las condiciones (11) y (10), se garantiza entonces que existe una región B , que es de atracción hacia la región A (figura 1).

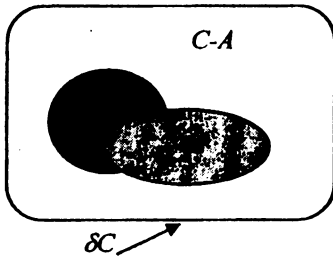


Figura 1: Disposición de las regiones de interés

Si eventualmente se cumple:

$$\max_{z \in \delta A} (V(z)) < \min_{y \in \delta C} (V(y)) \quad (12)$$

entonces podemos asegurar que la región B encierra a la región A (figura 2).

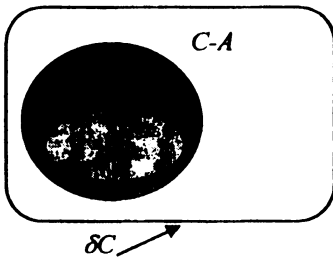


Figura 2: Disposición de las regiones según

Si el sistema tiene puntos de equilibrio fuera de la región A, entonces se deben definir entornos que los contengan, y ser excluidos de la región C-A.

Asimismo deben agregarse al conjunto delta C los contornos de los entornos de todos los puntos de equilibrio del sistema, que no estén contenidos en A (figura 3).

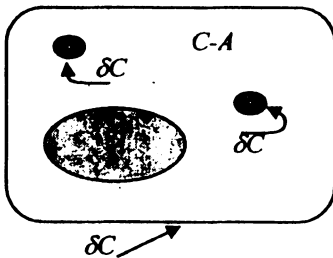


Figura 3: Exclusión de los puntos de equilibrio

Lema 1: Sea una función V(x) que cumpla la condición (11), entonces existe una región B, tal que

$$\forall x \in B, \quad V(x) < \min_{y \in \delta C} (V(y)) \quad (13)$$

Demostración: Ver apéndice

Lema 2: Sea una función V(x) que cumpla la condición (11) y dado

$$x(t_0) = x_0 \in C - A \text{ tq } V(x_0) < \min_{y \in \delta C} (V(y)), \quad (14)$$

$$(x_0 \in B)$$

entonces

$$\exists T > 0 \quad / \quad x(x_0, T) \in \delta A \quad (15)$$

Demostración: Ver apéndice

Como consecuencia de los lemas 1 y 2 planteamos el siguiente lema,

Lema 3: Dado el sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$, en el cual f(.) es una función continua en C y una región A de interés que cumple con la condición (9). Si existe una función V(x) que cumpla la condición (11), entonces la región A es atractiva, con región de atracción B.

Demostración: ver apéndice.

Adicionalmente, si

$$\exists \mu \in \delta C \text{ tq } V(\mu) = \min_{z \in \delta C} V(z), \quad (16)$$

$$\mu + \varepsilon \cdot f(\mu) \in C, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+$$

entonces la región B existe (figura 4) y cumple

$$Dist(B, \delta C) = 0 \quad (17)$$

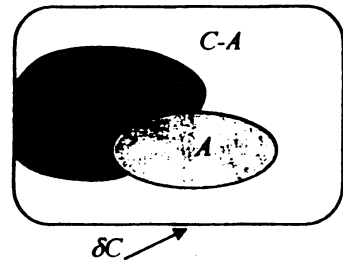


Figura 4: Región de atracción B con distancia cero a la región de interés C

Podemos generalizar esta propiedad, definiendo un subconjunto del contorno de C,

$$\delta_1 C \subset \delta C$$

$$\delta_1 C = \{ \mu \in \delta C \mid \mu + \varepsilon \cdot f(\mu) \in C, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \} \quad (18)$$

es decir, aquellos puntos donde el campo vectorial f(x) apunta hacia el interior de la región C (figura 5). De manera similar, podemos definir otro subconjunto donde el campo vectorial apunta hacia el exterior:

$$\delta_2 C \subset \delta C$$

$$\delta_2 C = \delta C - \delta_1 C$$

$$= \{ \mu \in \delta C \text{ tq } \mu + \varepsilon \cdot f(\mu) \notin C, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \} \quad (19)$$

Las condiciones que le exigiremos a la función de Lyapunov serán entonces:

$$D_f^+ V < -\gamma < 0, \quad \forall x \in C - A$$

$$\min_{z \in \delta_1 C} (V(z)) < \min_{z \in \delta_2 C} (V(z)) \quad (20)$$

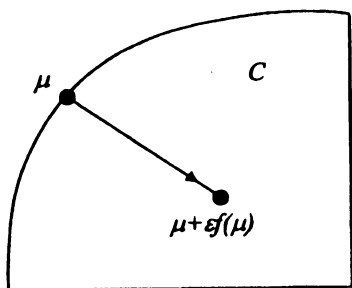


Figura 5: Puntos del contorno de C donde el campo vectorial apunta hacia el interior

3.2. Sistema no autónomo

Sean las regiones A y C tal como se definen en (9) y el sistema dinámico, no autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ x &\in C - A \subset R^n \\ u &\in U = \{u_1, u_2, \dots, u_L\} \subset R^m \end{aligned} \quad (21)$$

donde u es la acción de control que está restringida a un conjunto U de posibles valores. Además existe una región B de atractividad que cumple con la definición 2.1 y que en este caso lo expresamos como:

$$\forall x_0 \in B, \exists T > 0, \bar{u} = u(x) \text{ tq } x(x_0, T) \in \delta A \quad (22)$$

Es decir, dada cualquier condición inicial perteneciente a la región B, entonces en algún tiempo finito T, mediante una ley de control u(x), el estado del sistema alcanza el contorno de la región A. Además u(x) asume sólo valores pertenecientes al conjunto U.

Esto lleva a suponer que se puede dividir la región B en subregiones donde u(x) asumiría un valor fijo.

Si bien, inicialmente, se desconocen tanto la partición de B como los valores de la ley de control en cada subregion de dicha partición, es posible, mediante un método iterativo obtener dicha partición y sus leyes de control asociadas.

Este método iterativo la podemos resumir como sigue:

1. Se definen los conjuntos $A_0 = A$ y $C_0 = C$ con las condiciones (9) y se considera el sistema dinámico autónomo

$$\dot{x} = F_0(x) = f(x, u_{h(0)}) \quad (24)$$

en donde la ley de control es fija y cumple

$$u_{h(0)} \in U \quad (25)$$

y h(.) es un mapeo que 'recorre' el conjunto de acciones de control posibles U y donde estas no deben restringirse a valores constantes dado que pueden resultar de funciones algebraicas de los estados (ec. (26)),

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_R, u_{R+1}(x), u_{R+2}(x), \dots, u_L(x)\} \quad (26)$$

Con todo esto, el objetivo es buscar la existencia de una región de atracción B_0 .

2. En el próximo paso, se consideran las regiones

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + B_0 \\ C_1 &= C \end{aligned} \quad (27)$$

y el sistema dinámico autónomo

$$\dot{x} = F_1(x) = f(x, u_{h(1)})$$

Como antes, se busca una nueva región de atracción B_1 .

3. En forma general, se repite el procedimiento con el sistema autónomo

$$\dot{x} = F_k(x) = f(x, u_{h(k)}) \quad (28)$$

y con las regiones

$$\begin{aligned} A_k &= A_{k-1} + B_{k-1} \\ C_k &= C \end{aligned} \quad (29)$$

para encontrar la región de atracción B_k . En particular, nada impide que en ciertos casos $B_k = \phi$.

Como resultado de este ciclo iterativo, se obtiene un conjunto de regiones, $\{B_k\}_{k=0}^K$, sus controles asociados $\{u_{h(k)}\}_{k=0}^K$ y además, en cada región B_k , se halla una función de Lyapunov asociada, $V_k(x)$.

Consideremos ahora la función $V(x)$, definida en $B = \bigcup_k B_k$, según:

$$V(x) = V_k(x), \quad \forall x \in B_k. \quad (30)$$

Esta función no debe interpretarse como una función de Lyapunov definida para toda la región B, pues debe tenerse en cuenta que tal función es discontinua y por lo tanto en los puntos donde se presentan las discontinuidades no este definida la derivada direccional de V en la dirección del campo vectorial del sistema a lazo cerrado. Incluso es posible que

$$V(\eta + \varepsilon \cdot f(\eta)) - V(\eta) > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (31)$$

en algunos puntos donde se presenten dichas discontinuidades.

4. Algoritmo para determinar las regiones de atracción

En esta sección se completa el procedimiento iterativo desarrollado en la sección anterior con la determinación de la región de atracción B_k . El

planteo conduce a resolver un problema de sistema de inecuaciones lineales por medio de programación lineal.

Sea $\dot{x} = f_p(x)$ una aproximación LAT de un sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$, autónomo pues en cada paso se fija la ley de control. Y sea $V(x)$ la función de Lyapunov, también una función continua lineal a tramos.

Se adopta la representación matricial similar a la de Chien (1977). Entonces para todo punto x perteneciente al simplejo $S_i \subset R^n$ existe $\mu \in R^{n+1}$, tal que x puede expresarse como:

$$x = [p_1^{(i)} \dots p_{n+1}^{(i)}] \cdot \mu \quad (32)$$

donde $p_i^{(i)} \in \text{vert}(S_i)$, es decir son las coordenadas de los vértices y el vector $\mu = [\mu_1 \dots \mu_{n+1}]^T$, con $\mu_i \geq 0$, verifica:

$$1 = [1 \dots 1] \cdot \mu. \quad (33)$$

Por lo tanto el campo vectorial, con esta representación queda:

$$f_p(x) = [f_p(p_1^{(i)}) \dots f_p(p_{n+1}^{(i)})] \cdot \mu. \quad (34)$$

Las ecuaciones (32) y (33) se pueden expresar en la siguiente forma compacta:

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^{(i)} & \dots & p_{n+1}^{(i)} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \mu = P^{(i)} \cdot \mu. \quad (35)$$

Dado que los simplejos son propios, la matriz $P^{(i)}$ resulta definida positiva. Entonces

$$\mu = (P^{(i)})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

La función V es lineal en el interior de cada simplejo S_i , entonces para todo $x \in S_i$ se puede utilizar la siguiente representación matricial,

$$V(x) = [V(p_1^{(i)}) \dots V(p_{n+1}^{(i)})] \cdot \mu, \quad (37)$$

reemplazando (36) se obtiene:

$$V(x) = [V(p_1^{(i)}) \dots V(p_{n+1}^{(i)})] \cdot (P^{(i)})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

y su vector gradiente $\forall x \in S_i$

$$\nabla V(x) = [V(p_1^{(i)}) \dots V(p_{n+1}^{(i)})] \cdot \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix} = \nabla V^{(i)}. \quad (39)$$

En cada simplejo S_i se cumple:

- $\nabla V(x)$ es un vector fila constante $\nabla V^{(i)}$, y depende linealmente de los valores que asume

$V(x)$ en los vértices del simplejo; pues $V(x)$ es lineal en el interior de cada región S_i .

- $f_p(x)$ es una combinación convexa de los vectores $f_p(\cdot)$ evaluados en los vértices de S_i .

Entonces, para verificar que la derivada direccional de V en un punto $x \in S_i$, satisface

$$D_f^+ V = \nabla V(x) \cdot f_p(x) \leq -\gamma < 0, \quad (40)$$

es suficiente que se verifique en cada vértice:

$$\nabla V^{(i)} \cdot f(p_l^{(i)}) \leq -\gamma, \quad l = 1, \dots, n+1. \quad (41)$$

Por lo tanto, cada simplejo incorpora $n+1$ inecuaciones. La cantidad de inecuaciones puede reducirse al menos a n , si se considera la cáscara convexa que contiene a los $n+1$ vectores $f(p_l^{(i)})$.

Cada producto interno $\nabla V^{(i)} \cdot f(p_l^{(i)})$ es simplemente una combinación lineal de los valores de $V(\cdot)$ en los vértices.

$$\nabla V^{(i)} \cdot f(p_l^{(i)}) = \sum_k a_{ki} V(p_k) \quad (42)$$

donde los puntos p_k son los vértices de la grilla entera. Ésta es una expresión genérica, pero en realidad sólo intervienen los $p_k \in \{p_l^{(i)}\}$, es decir los vértices de ese simplejo. Los demás tendrán coeficiente nulo en la combinación lineal. Con lo cual las ecuaciones son raras y resulta beneficioso para el tratamiento computacional.

Entonces por cada vértice del simplejo se plantea la siguiente desigualdad lineal

$$\sum_k a_{ki} \cdot V(p_k) < -\gamma \quad (43)$$

En el caso 3-dimensional, cada simplejo (triángulo) aporta 3 inecuaciones lineales, y cada inecuación tiene sólo 3 coeficientes no nulos.

Con el fin de obtener un problema convexo, la condición

$$\min_{x \in \{p_{ki}^{(i)}\}} (V(x)) < \min_{x \in \{p_{ki}^{(i)}\}} (V(x)) \quad (44)$$

se reemplaza por

$$\text{promedio}(V(x)) < \min_{x \in \{p_{ki}^{(i)}\}} (V(x)). \quad (45)$$

Para implementar esta inecuación se incorpora una nueva variable λ auxiliar (incluso se le puede fijar un valor). Todos los puntos de la grilla, los que pertenezcan al contorno ∂A_E (contorno del conjunto A , donde el campo vectorial es entrante), conforman la siguiente inecuación:

$$\frac{\sum_{k=1}^K V(\eta_k)}{K} < \lambda, \quad (46)$$

donde $\eta_k \in \{p_l\} \cap \delta A_E$. Cada punto de la grilla ϕ_k que pertenece al contorno de la región C , ∂C , aporta una inecuación:

$$\lambda < V(\phi_k) \quad (47)$$

De estas inecuaciones se aprecia que los contornos de A y C deben coincidir con límites de simples.

Finalmente, el sistema de inecuaciones que se debe resolver es lineal respecto a los parámetros de interés, es decir los valores de V en los puntos de intersecciones de la grilla.

Una vez resuelto el sistema, la región de atracción es el conjunto:

$$B_k = \left\{ x \in C_k - A_k \mid V(x) < \min_{y \in \delta C} (V(y)) \right\} \quad (48)$$

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método iterativo para el diseño de un controlador no lineal.

El método genera una partición de la región de análisis y obtiene una función de Lyapunov y un control estabilizante asociado a cada subregión de la partición.

El problema de diseño se traduce a varios problemas de programación lineal, los cuales son numéricamente resolubles.

La principal limitación a este método radica en los casos de presencia de ciclos límites en los sistemas autónomos correspondientes al sistema no autónomo con entrada fija, para cuyos casos el método no halla solución.

Sin embargo, se está trabajando en este problema y en mejoras generales del método que serán presentados en futuros trabajos.

6. APENDICE.

Lema 1: Sea una función $V(x)$ que cumpla la condición (11), entonces existe una región B , tal que

$$\forall x \in B, \quad V(x) < \min_{y \in \delta C} (V(y)) \quad (49)$$

Prueba: En general, por ser $V(x)$ una función continua, dado un punto x_0 tq $V(x_0) < a$, entonces existe un entorno de x_0 , $b(x_0, \rho)$, $\rho > 0$, tal que $\forall y \in b(x_0, \rho)$ se cumple $V(y) < a$. Por lo tanto podemos asegurar que existirá un entorno del contorno de A que cumpla con (49) y ese contorno será parte de B .

Lema 2: Sea una función $V(x)$ que cumpla la condición (11) y dado

$$x(t_0) = x_0 \in C - A \text{ tq } V(x_0) < \min_{y \in \delta C} (V(y)) \\ (x_0 \in B)$$

entonces

$$\exists T > 0 \text{ tq } x(x_0, T) \in \delta A$$

Prueba: Si $V(x_0) < a = \min_{z \in \delta C} V(z)$ entonces $x(x_0, t)$ no puede alcanzar estados sobre δC , porque por ello produciría un aumento en $V(x)$, lo que contradice la condición $D_f V(x) < -\gamma < 0$.

Tampoco es posible que tienda a algún punto de equilibrio del sistema, en $C - A$, porque para ello debería cruzar δC .

Entonces solo es posible que en tiempo finito alcance el contorno δA .

Lema 3: Dado el sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$, en el cual $f(\cdot)$ es una función continua en C y una región A de interés que cumple con la condición (9). Si existe una función $V(x)$ que cumpla la condición (11), entonces la región A es atractiva, con región de atracción B .

Prueba: Basándose en los lemas 1 y 2 se ve que existe una región B tal que para todo $x_0 \in B$ se cumple que $\exists T > 0$ tq $x(x_0, T) \in \delta A$.

Por lo tanto la región A es atractiva, con región de atracción B

7. REFERENCIAS

- Chien, M. - Kuh, E. , "Solving nonlinear resistive networks using piecewise-linear analysis and simplicial subdivision", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-24, pp.305-317, 1977.
- Julian, P. - Guivant, J. - Desages, A., "A parametrization of Piecewise Linear Lyapunov Functions via Linear Programming". A aparecer en *Int. Journal of Control, special issue on Multiple model approaches in modelling and Control*, 1998a.
- Julián, P.- Desages, A. - Agamennoni, O., "High Level Canonical Piecewise Linear Representation using a simplicial partition". A aparecer en *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1998b.
- Vidyasagar, M. "Nonlinear Systems Analysis" 1993, Prentice-Hall Int. Inc.
- Guivant, J. - Julian, P. - Desages, A. "Análisis de Estabilidad usando funciones de Lyapunov Lineales a Tramos". AADECA 98, 1998