

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMAN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGIA
INSTITUTO DE INGENIERIA ELECTRICA**

**LABORATORIO DE PROCESAMIENTO DIGITAL DE INFORMACION
LABORATORIO DE TECNICAS DIGITALES**

ANALES

de la

5ª REUNION DE TRABAJO

EN

PROCESAMIENTO DE INFORMACION Y CONTROL

RPIC'93

1 AL 4 DE DICIEMBRE DE 1993

**EDITADO POR: "ASOCIACION COOPERADORA DE LA
FACULTAD DE CIENC. EXACTAS Y TECNOLOGIA"**



**HORCO MOLLE
TUCUMAN
REPUBLICA ARGENTINA**

INDICE DE TRABAJOS

SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

OBSERVADORES DE ORDEN REDUCIDO PARA SISTEMAS NO LINEALES M. Etchechoury, J. Solsona, C.Muravchik _____	1
TECNICAS HIBRIDAS EN EL ESTUDIO DE SINGULARIDADES EN SISTEMAS DE CONTROL REALIMENTADO Gabriel M.Cuello, Jorge L.Moiola, Pedro D.Doñate _____	9
OSCILACIONES Y COLAPSO DE VOLTAJE EN SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA María C.Colantonio, Jorge L.Moiola, Pedro D.Doñate _____	17
ADAPTIVE CONTROL OF NONLINEAR DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS J.C.Gómez, D.E. Viassolo, S.Junco _____	25
SENSORES DISTRIBUIDOS PARA LA DETERMINACION DE LOS MODOS DE FLEXION DE UNA BARRA EN ESTADO NO ESTACIONARIO Favio Masson, Gustavo Bortolotto, José Guivant, Eduardo Paolini _____	33
REPRESENTACION DE SISTEMAS NO LINEALES CON FORMAS CANONICAS LINEALES A TRAMOS Pedro M.Julián, Eduardo E.Paolini, Alfredo C.Desages _____	39
FAMILIA DE SISTEMAS LINEALES PARAMETRIZADOS REPRESENTATIVA DE SISTEMAS NO LINEALES Pablo Mandolesi, Guillermo Calandrini, Alfredo Desages _____	45
D-STABILITY MARGINS FOR SYSTEMS WITH STRUCTURED UNCERTAINTIES Walter Reartes, Alfredo Desages, Pablo Mandolesi _____	51
SECOND-ORDER SLIDING MODE STRATEGY USING AN EXTENDED LINEARIZATION APPROACH H.G.Chiacchiarini, A.C.Desages, J.A. Romagnoli _____	59
DETECCION DE ORBITAS DE PERIODO PAR EN SISTEMAS DISCRETOS NO LINEALES Graciela A. González, Eduardo P.Serrano, María Inés Troparovskiy _____	67

Sensores distribuidos para la determinación de los modos de flexión de una barra en estado no estacionario.

Favio Masson, Gustavo Bortolotto, José Guivant y Eduardo Paolini.

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
AV. ALEM 1253 - 8000 BAHÍA BLANCA

Resumen: Se presenta una técnica de colocación de sensores para la determinación de la función de posición de una barra elástica en estado no estacionario, usando sensores de deformación y de posición. Los resultados obtenidos se corroboran experimentalmente.

1. Introducción.

Tradicionalmente los robots industriales se han construido de tal manera que su estructura sea lo más rígida posible. De esta forma es fácil inferir la posición de la herramienta en base a mediciones angulares entre los vínculos. Lamentablemente, una estructura de este tipo conduce inevitablemente a construcciones de gran peso y elevado costo.

Existe en la actualidad una tendencia creciente hacia la utilización de estructuras más livianas y flexibles [2]. Sin embargo, la flexión de los vínculos hace que la posición de un extremo libre no pueda ser determinada directamente a partir del conocimiento del extremo conducido.

El problema estriba entonces en disponer de un conjunto de medidas que permitan inferir la función posición $P(x,t)$ de la barra. Para ello se utilizan sensores de deformación y de posición que miden la flexión de la barra y la posición del extremo libre.

El objetivo del presente trabajo es obtener una herramienta que permita calcular en todo momento la posición de un punto cualquiera de la barra, en particular del extremo libre. Para ello, se aprovecha información de sensores de deformación y posición juntamente con una representación matemática de la función posición $P(x,t)$, como expansión en una base de autofunciones de flexión.

En este trabajo se dan criterios para la selección de los puntos de colocación de los sensores, de manera tal que la representación de la función $P(x,t)$ tenga máxima precisión.

2. Obtención de $P(x,t)$.

Existen muchos modelos de variada complejidad para representar el sistema brazo-eje mostrado en la figura 1. La suposición principal es que el modelo es lineal en el plano de movimiento y las vibraciones longitudinales se asumen despreciables. En la formulación de las ecuaciones del sistema, se hacen las siguientes hipótesis adicionales: el brazo puede ser modelado como una varilla Bernoulli-Euler sin amortiguamiento natural y con geometría uniforme tal que EI y m son constantes; el radio r del eje en el punto de conexión al brazo es mucho menor que el largo del brazo y el eje es un cuerpo rígido.

La ecuación del movimiento para la vibración transversal del brazo usando las coordenadas del sistema mostradas en la figura 1 es:

$$EIw''''(x,t) + m\ddot{w}(x,t) + mx\ddot{\theta}(t) = 0, \quad (1)$$
$$0 \leq x \leq L$$

donde $w(x,t)$ indica el desplazamiento de un punto arbitrario del brazo en un tiempo t , EI expresa la rigidez a la flexión, m la masa por unidad de longitud, $\theta(t)$ el ángulo de la rotación del eje, L la longitud del brazo, y $w' = \partial(w)/\partial x$, $\dot{w} = \partial(w)/\partial t$.

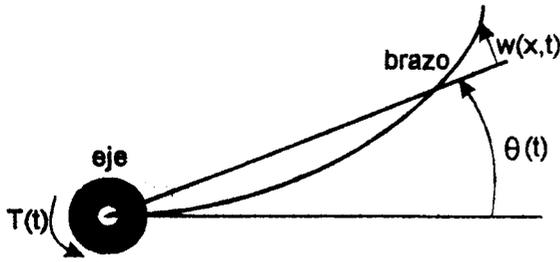


Figura 1: Esquema del sistema eje-brazo flexible

Las condiciones de borde son las de un brazo libre

$$w(0,t) = w'(0,t) = w''(L,t) = w'''(L,t) = 0 \quad (2)$$

La ecuación para el movimiento rígido del eje es:

$$J\ddot{\theta}(t) = T(t) + EIw'''(0,t) \quad (3)$$

donde J expresa la combinación de la inercia del eje y el actuador en el punto O , y $T(t)$ el torque aplicado al eje. Se asume que el radio r es despreciable.

Resolviendo para $w(x,t)$ desde las ecuaciones 1 y 2

$$Aw(x,t) + [m/(EI)]\ddot{w}(x,t) = -[m/(EI)]xT(t) \quad (4)$$

donde $A(x,t) = w''''(x,t) + (m/J)xw'''(0,t)$. El problema de autovalores asociados $Au(x) = \lambda^4 A(x)$ con la condiciones de borde mostradas en 2 no tiene soluciones para $\lambda = 0$ y tiene la siguiente solución para $\lambda \neq 0$:

$$\Lambda_k(x) = [\cos(\lambda_k x) - \cosh(\lambda_k x)] - \sigma_k [\sinh(\lambda_k x) - \sin(\lambda_k x)] + 2a \sinh(\lambda_k x) / \lambda_k^3 - 2ax / \lambda_k^2 \quad (5)$$

donde $a = m/J$ y σ_k está definida por:

$$\sigma_k = [\sin(\lambda_k L) - \sinh(\lambda_k L) + 2a \cosh(\lambda_k L) / \lambda_k^3] / [\cos(\lambda_k L) + \cosh(\lambda_k L)]$$

El autovalor λ_k es obtenido de la ecuación trascendente

$$0 = 1 + \cos(\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L) - [a / \lambda_k^3] [\cos(\lambda_k L) \sin(\lambda_k L) - \sin(\lambda_k L) \cosh(\lambda_k L)]$$

Entonces la posición de cualquier punto de la barra flexible puede representarse por la siguiente ecuación:

$$P(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t) \Lambda_j(x) \quad (6)$$

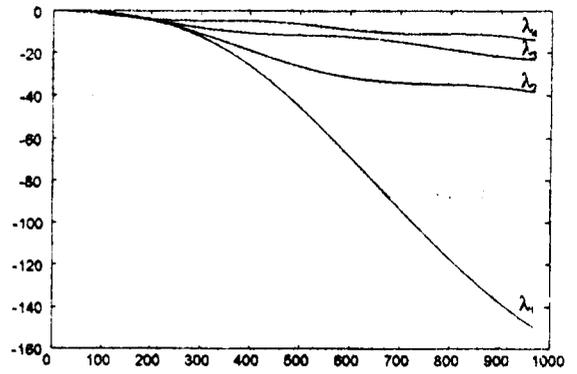


Figura 2: Las primeras cuatro autofunciones de $P(x,t)$

donde $\Lambda_j(x)$ son el conjunto de autofunciones espaciales de la flexión de la barra cuya expresión está dada por la ecuación 5, y los α_j son las funciones temporales de peso. La forma de las autofunciones se observa en la figura 2

3. Determinación de los puntos de colocación de los sensores

La representación del problema como expansión en serie de autofunciones puede ser expresada:

$$\tilde{P}(x,t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \Lambda_j(x) \quad (7)$$

donde teóricamente $N = \infty$. Sin embargo, en la práctica es habitual asumir que el desplazamiento $P(x,t)$ puede ser representado con buena fidelidad por un modelo truncado, es decir donde N en la ecuación 7 puede ser grande pero finito. La justificación para esta suposición es que el ancho de banda de actuadores y sensores no puede responder a las frecuencias de los modos más altos. Además, estos modos son difíciles de excitar en estructuras reales y tienen coeficientes de amortiguamientos grandes.

Para convalidar los resultados obtenidos se dispone de un resolutor vinculado al extremo libre de la barra que da información de la posición de este punto. La información entregada por este sensor debería coincidir con la posición evaluada mediante las autofunciones, esto es:

$$P_{resol}(x_{resol}, t) \cong \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t) \Lambda_j(x_{resol}) \quad (8)$$

Para medir la deformación local en los puntos seleccionados de la barra se utilizaron strain-gauges. Estos brindan información de la curvatura de la barra, que debería coincidir con el valor de la segunda derivada espacial de $P(x,t)$. Sea

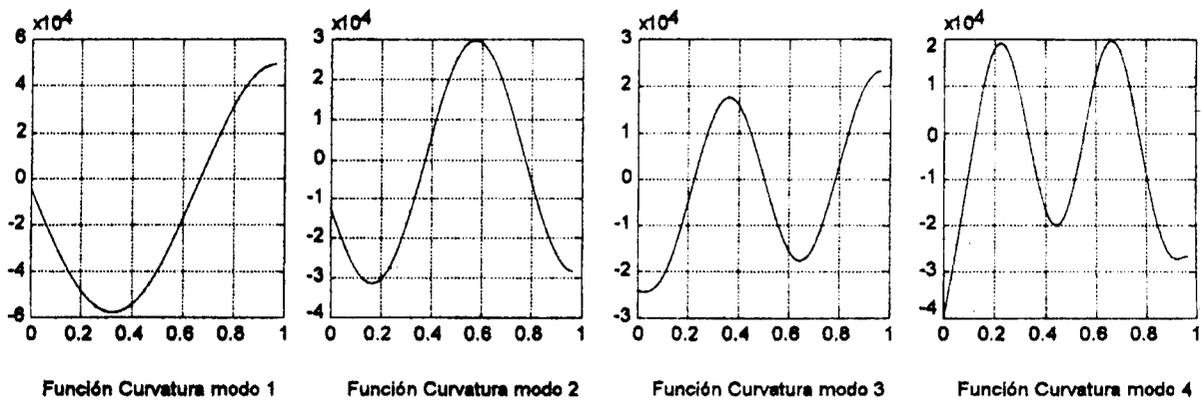


Figura. 3: Función curvatura para los primeros cuatro modos

$\phi_j(x)$ la segunda derivada espacial de $\Lambda_j(x)$ expresada por:

$$\phi_j(x) = \frac{d^2 \Lambda_j(x)}{dx^2} \quad (9)$$

La segunda derivada respecto a x de $P(x,t)$ se expresa como:

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t) \phi_j(x) \quad (10)$$

Estas funciones son las representadas en la figura 3 para la barra en estudio.

De la ecuación 7, se observa que dado un sistema particular, y conocidos los valores de sus parámetros (inercia, masa, etc.), las funciones $\Lambda_j(x)$ quedan determinadas. En cambio, el valor de los factores de peso $\alpha_j(t)$ depende de la deformación instantánea de la barra.

A efectos de ubicar los sensores, se supone que la cantidad de modos espaciales observables con N sensores será precisamente N . Las deformaciones provocadas por otros modos serán consideradas ruido de medición. La lectura de cada sensor, explicada en términos de las autofunciones es

$$M_f(x_i, t) = \alpha_1(t) \phi_1(x_i) + \alpha_2(t) \phi_2(x_i) + \dots + \alpha_N(t) \phi_N(x_i) + \varepsilon(t) \quad (11)$$

donde $M_f = \partial^2 \tilde{P}(x,t) / \partial x^2$ son las medidas hechas con los sensores de flexión, M_{res} es la medida de posición en el extremo libre de la barra, x_j los puntos donde están colocados los sensores de curvatura, ϕ_j las funciones mostradas en la ecuación 9 y $\varepsilon(t)$ es la componente de la medición no explicada por la base finita de las autofunciones.

Con estas medidas se puede construir un sistema de N ecuaciones con N incógnitas :

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{f1}(x_1) \\ \vdots \\ M_{fN}(x_N) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dado el valor de la ordenada x_j , los valores de las funciones $\phi_j(x_j)$ son conocidos. Las incógnitas son los valores de las funciones $\alpha_j(t)$, que representan los pesos temporales de la función $P(x,t)$. En notación matricial la ecuación 12 se expresa:

$$\Phi_{n \times n} \times \alpha_{n \times 1} = M_{n \times 1} \quad (13)$$

Para que este problema quede bien condicionado, se debe tratar que las columnas de la matriz Φ sean linealmente independientes y que los módulos de sus autovalores sean de magnitudes comparables, esto es, que Φ tenga un número de condición ρ cercano a la unidad. Este será el caso de mejor condicionamiento de la matriz.

Si se encuentra entonces, un conjunto de N puntos x_j que hagan a ρ máximo, los sensores de flexión darán la información más adecuada para determinar $\tilde{P}(x,t)$.

4. Resultados experimentales.

Como observación del condicionamiento de la matriz Φ se plantea la siguiente función objetivo a optimizar:

$$F_{obj} = \frac{\rho_{max}}{\rho_{min}} + \frac{1}{\rho_{min}} \quad (14)$$

Tabla I: Valores singulares de Φ para las posiciones óptimas.

ρ_{max}	984.62
ρ_1	715.6
ρ_2	568.23
ρ_{min}	568.02
Función Objetivo	1.735
m/J	1385 1/m ³

Tabla II: Posiciones óptimas de los sensores.

Sensor	Posición óptima
1	0.0716 m
2	0.2683 m
3	0.5693 m
4	0.7581 m

Tabla III: Valores de las constantes de los sensores de deformación

k_1	k_2	k_3	k_4
0.7778	0.7154	0.7212	0.8015

donde ρ_{min} es el mínimo valor singular de Φ y ρ_{max} es el mayor. Para esta función objetivo, el resultado más cercano a la unidad es el esperado.

Para ilustrar este problema de minimización se presentará gráficamente el caso $N = 2$ (figura 4), aunque en lo que resta de este trabajo se empleará $N = 4$. Como se observa en la figura, la función objetivo es una superficie con mínimos locales;

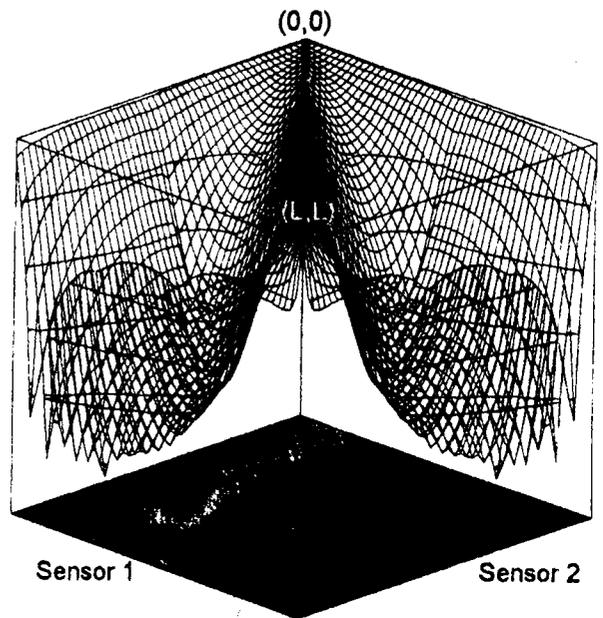


Figura 4: Valor de la función objetivo moviendo los sensores a lo largo de la barra, desde el origen (0,0) hasta el extremo (L,L).

debe proveerse un mecanismo para ubicar el óptimo global.

En realidad, no es imprescindible lograr el mejor número de condición, sino uno razonablemente bueno de manera que la inversión de la matriz Φ sea precisa. Se plantea entonces la matriz Φ en función de los cuatro valores x_j y se aplica un algoritmo de búsqueda del tipo gradiente. Se utili-

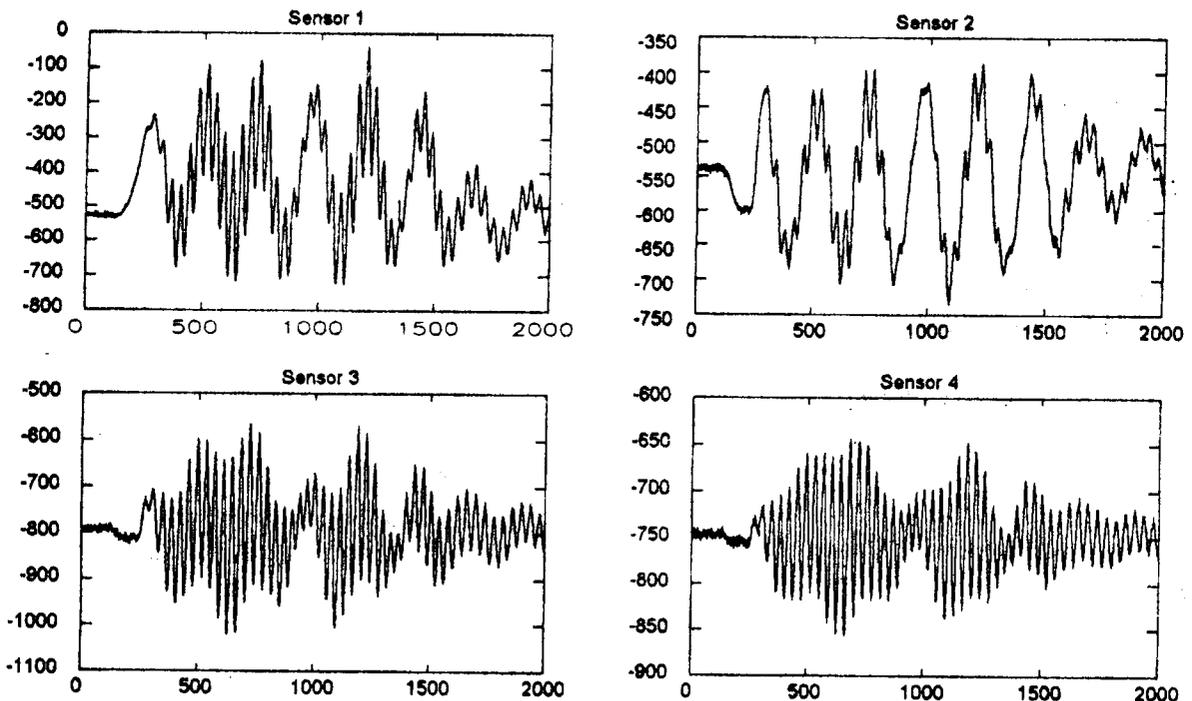


Figura 5: Medidas efectuadas sobre los sensores de flexión. En el eje x se representa el numero de muestra y en el eje y la cuenta de la tarjeta adquisidora.

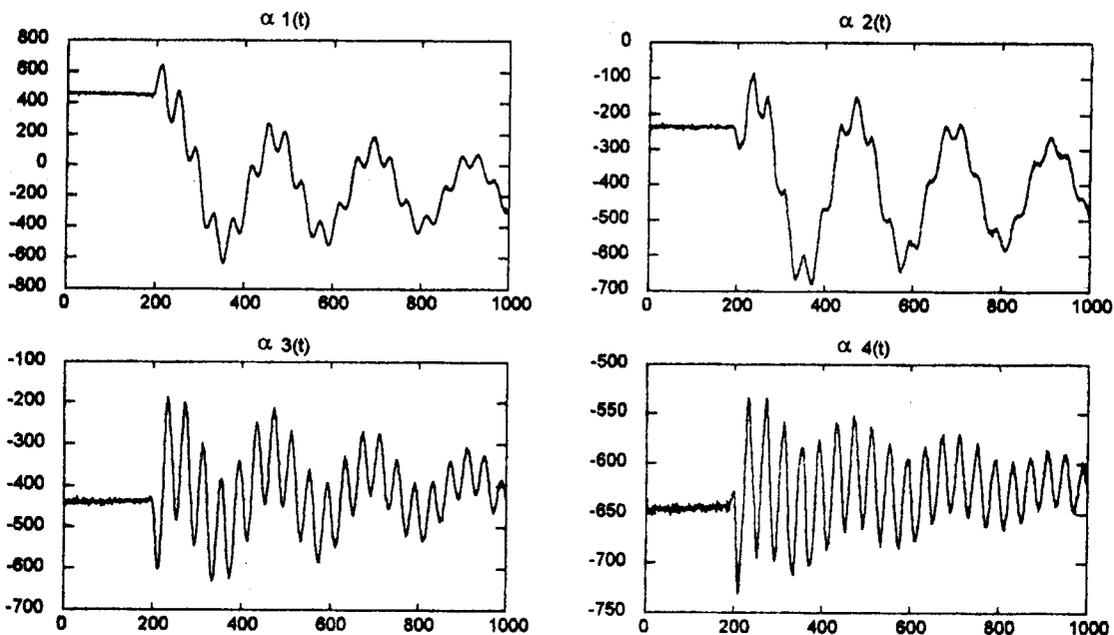


Figura. 6: $\alpha_i(t)$ calculados.

zan como condiciones iniciales para los primeros cuatro x_j valores aleatorios. Este procedimiento se repite varias veces con la intención de localizar el óptimo global, o al menos el menor de los mínimos locales hallados.

En la tabla I se muestra el valor de la constante $a = m/J$. Ésta se obtuvo midiendo la inercia del conjunto eje-motor que resultó ser $J = 0.44 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.sec}^2$ y la masa por unidad de longitud $m = 0.554 \text{ Kg/m}$. En la misma tabla se muestran los valores singulares de Φ . Las posiciones óptimas de los sensores se presentan en la tabla II,

Para la calibración de los sensores de deformación se hizo describir a la barra un arco de circunferencia en uno y otro sentido. Para una circunferencia, el valor de la curvatura es conocido e igual a la recíproca del radio. Las constantes se muestran en la Tabla III.

5. Validación de los resultados.

Para validar los resultados, se midió la posición en el extremo libre de la barra mediante un dispositivo mecánico vinculado a un resolutor. Se trabó el eje del motor y se dió a la barra una flexión inicial para luego dejarla evolucionar libremente. Para esta experiencia, $m/J = 0$ debido al empotramiento del rotor. Se adquirieron las señales correspondientes a los sensores de deformación (figura 5) y al resolutor (línea llena de al figura 7). Se calcularon los $\alpha(t)$ según la

ecuación 12; los resultados se muestran en la figura 6.

Una vez calculados los $\alpha(t)$, se obtuvo $\tilde{P}(x,t)$ para $x = L$, según la ecuación 7 con $N = 4$. En la figura 7 se aprecia que la medida de la posición estimada mediante el empleo de los sensores de deformación es muy similar a la obtenida directamente con el resolutor.

6. Conclusiones.

A partir de los resultados obtenidos se aprecia que la aproximación de la deflexión de una barra flexible con un número finito de modos es buena, al menos para el caso de deformaciones moderadas.

Esto significa que es posible conocer la posición de *cualquier punto* de una barra flexible a partir de un conjunto de mediciones de deformaciones locales, en puntos elegidos cuidadosamente, con poco error final. Este hecho puede ser aprovechado ventajosamente para el control preciso de este tipo de estructuras.

7. Referencias

- [1] Y. Chait, M. Miklavcic, C. Maccluer, C. Radcliffe, "A natural modal expansion for the flexible robot arm problem via a self-adjoint formulation", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Oct. 1990.

- [2] E. Nebot, "Modelling and control of a single link flexible manipulator", Ph.D. Thesis, Colorado State University, June 1988.
- [3] J. Guivant, F. Masson, E. Nebot, "Identificación en tiempo real de los parámetros de un brazo flexible", *Anales RPIC* 1991.
- [4] M. Balas, "Active Control of Flexible Systems", *Proc. Symp. Dynamics and Control of Large Flexible Systems*, 1977

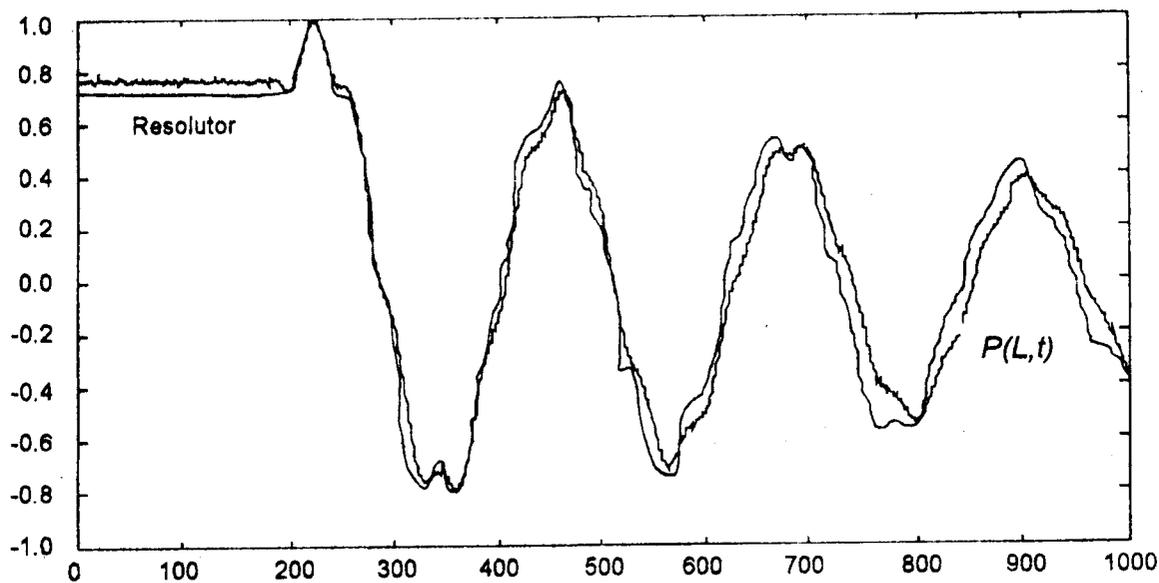


Figura. 7: Comparación entre las medidas hechas con un resolutor en la punta de la barra con la estimación de $P(x,t)$