

**7º CONGRESO  
LATINOAMERICANO  
DE CONTROL AUTOMATICO**



INTERNATIONAL FEDERATION  
OF AUTOMATIC CONTROL

**XV SIMPOSIO NACIONAL DE  
CONTROL AUTOMATICO**

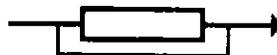
**TRABAJOS PRESENTADOS**

**Buenos Aires - Argentina  
9 al 13 de Setiembre de 1996**

**Volumen 2**

Publicado por

**AADECA**



**ASOCIACION ARGENTINA  
DE CONTROL AUTOMATICO**



## **ASOCIACION ARGENTINA DE CONTROL AUTOMATICO**

### **CONSEJO DIRECTIVO AADECA 94-96**

<b>Presidente:</b>	Ing. Jonas Paiuk
<b>Vicepresidente 1º:</b>	Ing. Aurelio T. Casucci
<b>Vicepresidente 2º:</b>	Ing. Zoltán L. Barkász
<b>Secretario General:</b>	Ing. Luis M. Buresti
<b>Prosecretario:</b>	Ing. Daniel O. Lupi
<b>Tesorero:</b>	Ing. Juan P. Weisz
<b>Vocales Titulares:</b>	Ing. Héctor A. Maceri
	Ing. Eduardo R. Rondelli
	Ing. Osvaldo H. Capino
<b>Vocales Suplentes:</b>	Ing. Sergio Szklanny
	Ing. Ricardo O. Carelli
<b>Adscripta a Consejo Directivo:</b>	Susana Terlizzi

### **Comisión Internacional de Programación**

**Presidente:** Köppel, V.J. Argentina

#### **Miembros:**

Barkász, Z.	Argentina	Marchetti, J.	Argentina
Brignole, E.	Argentina	Miyagi, P.	Brasil
Candiani, C.	Argentina	Naranjo Pérez, F.	Colombia
Celso de Lima, W.	Brasil	Paiuk, J.	Argentina
Cipriano, A.	Chile	Pereira Caloba, A.	Brasil
Godfrid, C.	Argentina	Quijano, A.	Argentina
Gomide, F.	Brasil	Rabanillo, A.	Cuba
Ibarra Zanata, M.	México	Sánchez Peña, R.	Argentina
Kuchen, B.	Argentina	Uria de Castillo, M.	Venezuela
Lefranc, G.	Chile	Valla, M.I.	Argentina

### **Comisión de Cursos**

Ing. Marinescu, Víctor F.

**7º CONGRESO LATINOAMERICANO DE CONTROL AUTOMATICO - LACC • IFAC  
9 al 13 de Setiembre de 1996 - Buenos Aires - Argentina**

095	Towards an on board path planning for a non-holonomic autonomous mobile robot towing a trailer. <i>M. Viale, T. Tsubouchi, Shin'ichi Yuta (Japón)</i>	935
112	Propuesta de una metodología para resolver la cinemática de un robot. <i>O. D. Morán, J. L. Sánchez López, R. S. Apóstoli (Argentina)</i>	942
113	Estação robótica para automação de processos de soldagem: implementação e perspectivas. <i>V. H. Casanova Alcalde, M. H. Suguieda, S. C. Absi Alfaro (Brasil)</i>	947
122	Navegación autónoma de vehículos usando lógica difusa. <i>G. Rodriguez Mir, O. Calvo (Argentina)</i>	952
136	Desarrollo de un controlador para un brazo robótico industrial. <i>E. Dolling, O. Márquez, R. Fullana, E. Zavalla (Argentina)</i>	958
151	Un método de generación de trayectoria para vehículos autoguiados. <i>E. Solimei, E. Sigampa, V. Mut (Argentina)</i>	964
153	Control adaptable de seguimiento para robots basado en visión: un algoritmo discretizado. <i>O. Nasisi, R. Carelli, B. Kuchen (Argentina)</i>	970
177	Reconocimiento del entorno mediante ultrasonido. <i>C. López, M. Maggini, F. Masson, Pablo Mandolesi, O. Agamennoni (Argentina)</i>	976
178	Manejo de fallas de sensores en vehículos autónomos. <i>M. Zambón, R. Santos, F. Masson, O Agamennoni (Argentina)</i>	981
254	Estabilidad local para un control PWM de un motor para articulaciones robóticas. <i>G. Lefranc, L. Torres, A. I. Mahla (Chile)</i>	987
256	Sistema adaptivo de iluminación para visión computarizada aplicada a robótica. <i>M. Peña, R. Osorio (México), G. Lefranc (Chile)</i>	993
258	Modelo discreto de un sistema PWM con controlador PID. <i>A. I. Mahla, G. Lefranc, L. Torres (Chile)</i>	999

**TELECONTROL**

228	Sistemas de telecontrol: protocolos de transmisión de datos. <i>R. Pellizzoni (Argentina)</i>	1005
257	Solução do problema de fluxo de potencia ótimo com restrições de segurança em cluster de computadores. <i>O. R. Saavedra Mendez (Brasil)</i>	1012

**TEORIA EN CONTROL**

008	Síntesis de controladores utilizando el criterio de estabilidad de Lyapunov. <i>E. Granado, W. Colmenares, O. Pérez (Venezuela)</i>	1019
-----	--	------

**7º CONGRESO LATINOAMERICANO DE CONTROL AUTOMATICO - LACC • IFAC**  
**9 al 13 de Setiembre de 1996 - Buenos Aires - Argentina**

- 174 Transformaciones no lineales de distribuciones de probabilidad. Aplicación al filtro de información. 1116  
*F. Masson, G. Bortolotto, A. Desages (Argentina)*
- 176 Control adaptivo de sistemas inestables de fase mínima con modelo inverso. 1122  
*M. A. Jordán, O. A. Orqueda, A. C. Desages (Argentina)*
- 182 Detección de bifurcación de doble período en sistemas de control no lineales. 1128  
*D. W. Bernsl, J. L. Moiola (Argentina)*
- 183 Control paramétrico de bifurcaciones utilizando sistemas realimentados. 1134  
*J. L. Moiola (Argentina)*
- 184 Control of uncertain piecewise linear systems. 1140  
*P. S. Mandolesi, P. M. Julian, A. C. Desages (Argentina)*
- 185 Sistemas discretos lineales a tramos: control por estructura variable. 1146  
*P. Julián, H. G. Chiacchiarini, H. Sira Ramirez, A. C. Desages (Argentina)*
- 186 Control por modos deslizantes de alto orden: diseño nominal. 1152  
*H. G. Chiacchiarini, A. C. Desages (Argentina)*
- 149 Control por matriz dinámica: propuesta de modificaciones al algoritmo de control DMC. 1158  
*S. Matilde Piñón, M. Rodriguez (Cuba), B. Kuchen (Argentina)*
- 235 Controlador de Dahlin de variância mínima auto-ajustável modificado. 1164  
*G.L.F. Vaz, A. R Coelho (Brasil)*
- 116 Sistema global de posicionamiento: Convertidor de potencia para un transmisor de DGPS. 1170  
*S. A. González, H. E. Lorente, C. H. Muravchik, M. I. Valla (Argentina)*
- 104 Linealización y desacoplamiento exactos entrada-salida del motor asincrónico mediante inversión causal. 1176  
*S. Junco (Argentina)*
- 105 Linealización exacta entrada-salida vía inversión causal de diagramas de bloques. 1183  
*S. Junco (Argentina)*

## Transformaciones no lineales de distribuciones de probabilidad. Aplicación al filtro de información

F. Masson \*, G. Bortolotto \* y A. Desages \*\*

\*CONICET, Dto. Ing. Eléctrica, Universidad Nacional Del Sur

\*\*C.I.C, Comisión de Investigaciones Científicas P.B.A. y Dto. Ing. Eléctrica, UNS

**Abstract.** La principal contribución de este trabajo es la aplicación de técnicas de transformaciones no lineales de distribuciones de probabilidad, al filtro de información. Se muestra con un ejemplo muy tratado en la literatura, cómo esta implementación equipara los resultados obtenidos por el trabajo que inspira esta aplicación. La motivación por estas técnicas reside en la importancia que tiene este algoritmo de estimación aplicado a sistemas descentralizados.

**Key Words.** EKF, Filtro de Información, Estimación No Lineal

### 1. INTRODUCCIÓN

Posiblemente la representación de incertidumbres es el problema más importante que aparece en el seguimiento y control de sistemas. Los estados de un sistema raramente son conocidos perfectamente cuando son medidos o estimados, ya sea porque los instrumentos o procesos de medida poseen precisión limitada, o porque los modelos del sistema no incluyen todos los parámetros que gobiernan su comportamiento. Así, las incertidumbres asociadas con la estimación de estados puede ser representada en forma más general por una distribución de probabilidad, incorporando todo el conocimiento que se posee del estado. La solución más y exitosa es el filtro de Kalman, que para sistemas lineales provee una solución óptima con los dos primeros momentos que son la media y la varianza de los estados.

El filtro de Kalman explota el hecho de que, dada la media y la varianza (covarianza en el caso de múltiples estados) de la distribución, la asunción más conservativa que se puede realizar es que ésta es gaussiana y además que al operar linealmente sobre ésta, siempre se obtiene otra distribución gaussiana. El primer requerimiento no es difícil de cumplir en la práctica, sin embargo, que tanto el modelo del proceso como el de observación cumplan leyes lineales, es algo que en general no se cumple.

El filtro *extendido de Kalman* (EKF) es una implementación imperfecta que intenta extender el filtro de Kalman a sistemas no lineales. Más específicamente, el EKF simplemente utiliza una propagación de las covarianzas basada en linealizaciones locales.

Por otro lado, el filtro de información es esencial-

mente un filtro de Kalman expresado en términos de la medida de la *información* de los parámetros o estados de interés antes que en una estimación directa de los estados y sus covarianzas asociadas. Una inicialización mucho más sencilla y la simplicidad de sus ecuaciones para la aplicación a sistemas descentralizados, hace a este filtro interesante aunque poco tratado en la literatura. El filtro extendido de información, por ser una variante algebraica del de Kalman, adolece de sus mismos inconvenientes. Sin embargo, a pesar de que son conocidas las dificultades de implementación, sintonía, etc., ambos son ampliamente usados para la estimación de sistemas con incertidumbres asociadas a las mediciones y aproximaciones en los modelos.

Recientemente en la literatura se ha presentado una técnica de estimación lineal que obtiene desempeños equivalentes al filtro de Kalman para sistemas lineales, y que puede ser generalizada a sistemas no lineales. Está técnica desarrollada por Julier, S. (1995), demuestra analíticamente para el filtro por ellos desarrollados una performance superior al EKF. En este trabajo, presentaremos primero esta técnica y luego utilizando estos resultados, se desarrollará una versión no lineal del filtro de información, expresando la estimación, en las variables de información. La necesidad de realizar esta derivación, reside en la aplicación que poseen este tipo de estimadores estocásticos en estimaciones y control descentralizado y distribuido.

### 2. EL FILTRO DE KALMAN

Consideremos un sistema que evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k+1), k+1] + \mathbf{v}(k+1) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{f}[\cdot, \cdot, \cdot]$  es el modelo del proceso,  $\mathbf{x}(k)$  es el vector de estados del sistema en el instante  $k$ ,  $\mathbf{u}(k)$  es el vector de entradas y  $\mathbf{v}(k)$  es un ruido aditivo de proceso. La única suposición sobre  $\mathbf{f}[\cdot, \cdot, \cdot]$  es que tiene esperanza finita, esto es, si  $\mathbf{x}$  es una variable aleatoria su esperanza cumple la desigualdad

$$\mathbb{E}[\|\mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k+1), k+1]\|] < \infty \quad (2)$$

para cualquier elección de  $\mathbf{u}(k+1)$  y  $k+1$ . La única información disponible del sistema son sus entradas de control y el conjunto de observaciones  $\mathbf{z}(k+1)$ . Estas observaciones están relacionadas con el vector de estados por la siguiente ecuación

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{u}(k+1), k+1] + \mathbf{w}(k+1) \quad (3)$$

donde  $\mathbf{z}(k+1)$  es el vector de observaciones y  $\mathbf{h}[\cdot, \cdot, \cdot]$  es el modelo de observación que transforma el espacio de estados de la planta en el espacio de observaciones y  $\mathbf{w}(k)$  es un ruido aditivo de medida.

Asumimos que los vectores de ruido aditivo  $\mathbf{v}(k)$  y  $\mathbf{w}(k)$  son gaussianos y forman secuencias no correlacionadas de ruido blanco

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{v}(k)] &= \mathbb{E}[\mathbf{w}(k)] = \mathbf{0} \quad \forall k \\ \mathbb{E}[\mathbf{v}(k), \mathbf{v}^T(k)] &= \delta_{ij} \mathbf{Q}(i) \\ \mathbb{E}[\mathbf{w}(k), \mathbf{w}^T(k)] &= \delta_{ij} \mathbf{R}(i) \\ \mathbb{E}[\mathbf{v}(k), \mathbf{w}^T(k)] &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

El verdadero vector de estados del sistema es desconocido y debe ser estimado. Con las suposiciones hechas sobre  $\mathbf{v}(k)$  y  $\mathbf{w}(k)$  los estados son variables aleatorias y el error mínimo cuadrático se logra usando media condicional. Definimos  $\hat{\mathbf{x}}(i|j)$  la estimación en el instante  $i$  condicionada a las observaciones hechas hasta el instante  $j$ ,

$$\hat{\mathbf{x}}(i|j) = \mathbb{E}[\mathbf{x}(i) | \mathbf{Z}^j] \quad (5)$$

donde  $\mathbf{Z}^j = [\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(j)]^T$ . La covarianza condicional de esta estimación es

$$\mathbf{P}(i|j) = \mathbb{E} \left[ \begin{array}{c} \{\mathbf{x}(i) - \hat{\mathbf{x}}(i|j)\} \\ \cdot \{\mathbf{x}(i) - \hat{\mathbf{x}}(i|j)\}^T | \mathbf{Z}^j \end{array} \right] \quad (6)$$

En general es muy difícil determinar los valores de estas cantidades y se emplea a menudo un estimador lineal. Este tipo de estimador incorpora la información de observación linealmente pero no requiere que el proceso y la relación entre los estados y la observación sean lineales. La forma que toman este tipo de estimadores es la llamada *predictor-corrector*. Primero, la estimación actual

del estado y su covarianza son transformados a través de las ecuaciones de transición de estados y de observación. Estas cantidades representan un predictor de un paso hacia adelante en el instante  $k+1$  dadas todas las observaciones hasta el instante  $k$ . El sistema es observado en el instante  $k+1$  y la información de observación es usada para actualizar las predicciones y así obtener las estimaciones  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1)$  y  $\mathbf{P}(k+1|k+1)$ . Las ecuaciones de actualización son

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{W}(k+1) \mathbf{v}(k+1) \quad (7)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{W}(k+1) \mathbf{P}_{vv}(k+1|k) \mathbf{W}^T(k+1) \quad (8)$$

El vector  $\mathbf{v}(k+1)$  es la innovación, es decir la diferencia entre la observación actual  $\mathbf{z}(k+1)$  y la media de la observación anterior

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1|k) \quad (9)$$

La covarianza de esta cantidad es  $\mathbf{P}_{vv}(k+1|k)$ . A  $\mathbf{W}(k+1)$  se la denomina ganancia de Kalman y su valor está dado por

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{P}_{xz}(k+1|k) \mathbf{P}_{vv}^{-1}(k+1|k) \quad (10)$$

En el marco del problema de estimación la precisión de las predicciones de la media y la covarianza son factores determinantes en el desempeño del estimador. Así, el EKF asume que

$$\hat{\mathbf{x}}_{(k+1|k)_{EKF}} = \mathbf{f}[\mathbb{E}[\mathbf{x}(k) | \mathbf{Z}^j], \mathbf{u}, k+1] \approx \mathbb{E}[\mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}, k+1] | \mathbf{Z}^j] \quad (11)$$

Esto es equivalente a asumir que la media estimada en el paso previo,  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ , es aproximadamente igual al estado verdadero del sistema en ese momento. Asumiendo por lo tanto que el tamaño del error es pequeño, el modelo dinámico de estados es expandido en series de Taylor alrededor de la estimación  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ . Despreciando términos de segundo orden y superior, la predicción de los estados se propaga a través de las ecuaciones no lineales. La predicción de los estados y su covarianza queda

$$\hat{\mathbf{x}}_{(k+1|k)_{EKF}} = \mathbf{f}[\hat{\mathbf{x}}(k|k), \mathbf{u}(k+1), k+1] \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_{(k+1|k)_{EKF}} = \nabla \mathbf{f} \mathbf{P}(k|k) \nabla \mathbf{f}^T + \mathbf{Q}(k+1) \quad (13)$$

donde  $\nabla \mathbf{f}$  es la matriz jacobiana de la ecuación de transición de estados  $\mathbf{f}[\cdot, \cdot, \cdot]$  evaluada alrededor de  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  y  $\mathbf{Q}(k+1)$  es la covarianza del ruido inyectado a la dinámica entre  $k$  y  $k+1$ .

Por un proceso similar, se expande alrededor de  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$  en series de Taylor a la ecuación de

observación y se trunca en el primer término. La observación, covarianza de observación y cros-covarianza predichas quedan

$$\hat{\mathbf{z}}_{(k+1|k)_{EKF}} = \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(k+1|k), \mathbf{u}, k+1] \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_{vv}(k+1|k)_{EKF} = \nabla \mathbf{h} \mathbf{P}(k+1|k) \nabla \mathbf{h}^T + \mathbf{R}(k+1) \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{zz}(k+1|k)_{EKF} = \mathbf{P}(k+1|k) \nabla \mathbf{h}^T \quad (16)$$

El filtro extendido de Kalman es en general subóptimo para sistemas no lineales. Las predicciones son hechas todas asumiendo que los errores de truncación en las series de Taylor son pequeños y se necesita que tanto la función  $\mathbf{f}[\cdot, \cdot, \cdot]$  y  $\mathbf{h}[\cdot, \cdot, \cdot]$  sean derivables. El impacto, fundamentalmente de la primera asunción, es muy importante al punto que el hecho de sintonizar correctamente este tipo de filtros es en general un problema de difícil solución.

## 2.1. EL NUEVO FILTRO

La idea presentada en Julier (1995), es encontrar una parametrización que permita capturar la información de la media y la covarianza y que al mismo tiempo permita la propagación directa de la información a través de un conjunto arbitrario de ecuaciones no lineales. Ésto se logra generando una distribución discreta que tenga los mismos primero y segundo momentos, donde cada punto de la aproximación discreta puede ser transformado directamente. La media y la covarianza del conjunto transformado puede ser calculada entonces como la estimación de la transformación no lineal de la distribución original.

Dada una distribución gaussiana  $n$ -dimensional con covarianza  $\mathbf{P}$ , se generan un conjunto de puntos, que poseen la misma covarianza de las columnas (o filas) de las matrices  $\pm \sqrt{n\mathbf{P}(k|k)}$ . Este conjunto de puntos tiene media cero, sumando entonces a cada uno de los puntos la media de la distribución original  $\bar{\mathbf{x}}$ , se obtiene un conjunto simétrico de  $2n$  puntos con la media y covarianza deseadas. Dado que el conjunto es simétrico, sus momentos centrales impares son cero, por lo tanto los tres primeros de éstos son los mismos que los de la distribución gaussiana original. Éste es el mismo número de puntos capaz de captar toda la información necesaria.

Concretando, el sistema es observado en el instante  $k+1$  y se dispone de la media  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  y de la covarianza  $\mathbf{P}(k|k)$  de los estados en el instante  $k$ . Se desea predecir  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$  y  $\mathbf{P}(k+1|k)$  a través de la función no lineal  $\mathbf{f}[\cdot]$  que describe el sistema. El método puede ser resumido así:

(i) Se calcula el conjunto  $\sigma(k|k)$  de  $2n$  puntos como las filas o columnas de las matrices  $\pm \sqrt{n\mathbf{P}(k|k)}$ . Este conjunto de puntos tiene media cero y covarianza  $\mathbf{P}(k|k)$ . Se calcula luego un conjunto de puntos con la misma covarianza pero media  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ , trasladando cada uno de ellos como  $\chi_i(k|k) = \sigma(k|k) + \hat{\mathbf{x}}(k|k)$ .

(ii) Se transforma cada punto como  $\chi_i(k+1|k) = \mathbf{f}[\chi_i(k|k), \mathbf{u}(k+1)]$

(iii) Se evalúa  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$  y  $\mathbf{P}(k+1|k)$  calculando la media y la covarianza del conjunto de los  $2n$  puntos  $\chi_i(k+1|k)$ . Nos quedarán entonces

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \chi_i(k+1|k) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_i &= \chi_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \mathbf{P}(k+1|k) &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i^T \end{aligned} \quad (18)$$

Para completar la descripción del nuevo filtro, se debe calcular el equivalente estadístico de la secuencia de innovación y la cros-correlación. Obtenemos entonces

$$\mathbf{Z}_i(k+1|k) = \mathbf{h}[\chi_i(k+1|k), \mathbf{u}, k+1] \quad (19)$$

como la media y como la covarianza de observación a

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1|k) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{Z}_i(k+1|k) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{Z}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{z}}(k+1|k) \\ \mathbf{P}_{zz}(k+1|k) &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\mathbf{z}}_i \tilde{\mathbf{z}}_i^T \end{aligned} \quad (21)$$

La covarianza de innovación es igual a la suma de  $\mathbf{P}_{zz}(k+1|k)$  y el ruido de observación, es decir

$$\mathbf{P}_{vv}(k+1|k) = \mathbf{P}_{zz}(k+1|k) + \mathbf{R}(k+1) \quad (22)$$

Finalmente, por las propiedades de las incertidumbres  $\mathbf{v}(k+1)$  y  $\mathbf{w}(k+1)$ , la matriz de cros-correlación estará dada por

$$\mathbf{P}_{zz}(k+1|k) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{z}}_i^T \quad (23)$$

Actualizamos finalmente con las mediciones, según las ecuaciones (7) a (10), las predicciones hechas usando el modelo no lineal,

## 2.2. EJEMPLO

La impacto de la ecuación (11), puede ilustrarse en el siguiente ejemplo (Julier, 1995). Consideremos el movimiento de un vehículo a través de una trayectoria circular. El modelo del proceso describe la posición y orientación del vehículo  $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \psi(k)]^T$ . La velocidad del

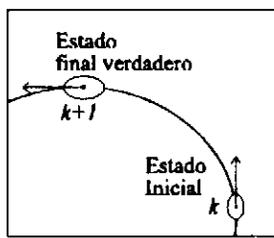


Fig. 1. Media y covarianza de un vehículo en  $t = k$  y  $t = k + 1$

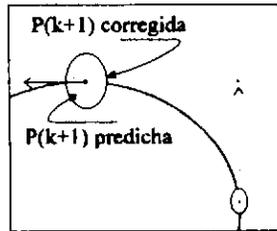


Fig. 2. Predicción y corrección de la media y la covarianza con el EKF

vehículo es  $V(k)$  y el radio de curvatura  $R(k)$ . El modelo discreto será

$$x(k+1) = x(k) + R(k) \cdot \left( \sin \left( \psi(k) + \frac{V(k)\Delta T}{R(k)} \right) - \sin(\psi(k)) \right) \quad (24)$$

$$y(k+1) = y(k) + R(k) \cdot \left( \cos \left( \psi(k) + \frac{V(k)\Delta T}{R(k)} \right) - \cos(\psi(k)) \right) \quad (25)$$

$$\psi(k+1) = \psi(k) + \frac{V(k)\Delta T}{R(k)} \quad (26)$$

Se asume que la velocidad del vehículo  $V(k)$  está distorsionada por un ruido no correlacionado de media cero. Tanto esta situación como la correspondiente a la verdadera media y covarianza predicha en  $t + \Delta t$  se muestran en la fig. 1. Como se observa, la elipse de covarianza se expandió y rotó. La incertidumbre inicial en la posición está aumentada por las incertidumbres adicionales en el movimiento del vehículo a través del arco. Aplicando entonces en el instante  $k$  las ecuaciones de predicción (12) a (16) obtenemos la elipse punteada de la fig. 2. Mientras que la estimación de la media es hecha utilizando las ecuaciones del modelo, la covarianza es proyectada linealmente en la dirección inicial del movimiento. Ésto hace que se pierda parte crítica de la información que es la mayor componente de incertidumbre en la dirección del vehículo. Esto puede ser corregido agregando dinámica de ruido al modelo ( $Q(k)$ ), con lo cual se expande la elipse de manera que abarque a la verdadera elipse; esta situación se

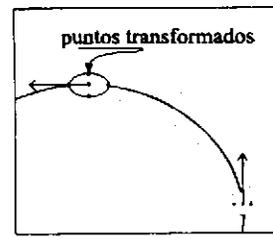


Fig. 3. Predicción del nuevo filtro

representa con línea llena en la misma figura. La fig. 3, muestra como el nuevo filtro de Kalman proyecta la posición del vehículo. Antes que proyectar la media y la covarianza a través de ecuaciones separadas, la elipse es aproximada por un conjunto discreto de puntos como se muestra en esa figura. Cada uno de esos puntos se proyectan por separado a través del camino circular y por lo tanto la elipse resultante está rotada y escalada.

### 3. EL FILTRO DE INFORMACIÓN

El filtro de información es esencialmente un filtro de Kalman expresado en términos de la medida de información que se posee de los estados. Las dos variables que forman la idea base de este filtro son la *matriz de información* y el *vector de estados de información*. La primera de ellas, se obtiene a partir de la teoría de Bayes y el principio de medida de Fisher. Éste indica que, *información* es la cantidad de conocimiento de los estados  $x$ , que está presente en el conjunto de observaciones  $Z^k$  hasta el instante  $k$ . Luego de un calculo sencillo se llega a que esa matriz de información, que llamaremos  $Y$ , es igual a

$$Y(i|j) \doteq P^{-1}(i|j) \quad (27)$$

A su vez, el vector de estados de información es el producto de la matriz de información y la estimación de los estados.

$$\hat{y}(i|j) \doteq P^{-1}(i|j) \hat{x}(i|j) \doteq Y(i|j) \hat{x}(i|j) \quad (28)$$

Así, manipulando las ecuaciones (12) a (16) para el estimador y (7) a (10) para el predictor, se obtienen las ecuaciones (29) a (32) que expresan la forma del filtro extendido de información (EIF) para sistemas no lineales

*Predicción*

$$\hat{y}(k+1|k) = Y(k+1|k) f(\hat{x}(k|k), u(k), k) \quad (29)$$

$$G_{(k+1)} = \nabla f_x Y(k|k) \nabla f_x^T \quad (30)$$

$$Y(k+1|k) = [G_{(k+1)} + Q(k+1)]^{-1}$$

$$\hat{y}(k+1|k) = \hat{y}(k+1|k) + i(k+1) \quad (31)$$

$$Y(k+1|k) = Y(k+1|k) + I(k+1) \quad (32)$$

donde la contribución a la información esta dada por

$$\begin{aligned} i(k+1) &= \nabla h_x^T(k+1) R^{-1}(k+1) \tilde{z} \\ \tilde{z} &= [v(k+1) + \nabla h_x(k+1) \hat{x}(k+1|k)] \end{aligned} \quad (33)$$

$$I(k+1) = \nabla h_x^T R^{-1}(k+1) \nabla h_x \quad (34)$$

y donde  $v(k)$  es el vector de innovación igual a

$$v(k+1) = z(k+1) - h(\hat{x}(k+1|k)) \quad (35)$$

Este filtro resuelve en el espacio de información, el problema de la estimación lineal para sistemas con dinámica y observación no lineal. Sin embargo, algunas de las desventajas que afectan al filtro extendido de Kalman siguen afectando al de información. En estas se incluyen la obtención de los jacobianos y la naturaleza local de la linealización. Sin embargo, la inicialización de éste filtro es más sencilla, esto es debido a que la estimación de la información inicial es sencillamente igualada a cero. aunque en la implementación se iguala la matriz de información a valores pequeños distintos de cero en la diagonal.

### 3.1. NUEVO FILTRO DE INFORMACIÓN

Utilizando un razonamiento similar al empleado en el filtro extendido de Kalman, se intenta aplicar los principios del nuevo filtro de Kalman al espacio de información. Ésto genera, de la misma manera que antes, un filtro que predice y estima información de los estados no lineales, dadas observaciones y dinámicas no lineales, sin recurrir a linealizaciones locales y de una manera que extiende en forma más natural el concepto del filtro de Kalman para el caso de sistemas lineales.

En primer lugar las ecuaciones de predicción se calculan como

$$\hat{y}(k+1|k) = Y(k+1|k) \hat{x}(k+1|k) \quad (36)$$

$$Y(k+1|k) = P^{-1}(k+1|k) \quad (37)$$

donde  $\hat{x}(k+1|k)$  y  $P^{-1}(k+1|k)$  se hallan a través de las ecuaciones (17) y (18) tomando a  $x(k|k) = Y^{-1}(k|k)y(k|k)$  y  $P(k|k) = Y^{-1}(k|k)$ .

Luego se demuestra fácilmente la siguiente igual-

dad

$$P_{xx}(k+1|k) = P_{xx}^T(k+1|k) \cdot P^{-1}(k+1|k) P_{xx}(k+1|k) \quad (38)$$

y operando algebraicamente las ecuaciones (7) a (10), se obtienen las expresiones de la estimación en el espacio de información

$$\hat{y}(k+1|k+1) = \hat{y}(k+1|k) + i(k+1) \quad (39)$$

$$Y(k+1|k+1) = Y(k+1|k) + I(k+1) \quad (40)$$

donde la contribución a la información está dada por

$$\begin{aligned} H &= Y(k+1|k) P_{xx}(k+1|k) \\ i(k+1) &= HR^{-1}(k+1) \tilde{s} \\ \tilde{s} &= [v(k+1) + P_{xx}^T(k+1|k) \hat{y}(k+1|k)] \end{aligned} \quad (41)$$

$$I(k+1) = HR^{-1}(k+1) H^T \quad (42)$$

y donde  $v(k)$  es el vector de innovación y es igual a

$$v(k+1) = z(k+1) - \hat{z}(k+1|k) \quad (43)$$

Como se observa, se obtiene una expresión del filtro de información, empleando transformaciones no lineales de la distribuciones de probabilidad. Sin embargo, en apariencia, se complica el cálculo comparando estas ecuaciones con las del filtro de Kalman. Pero esto que aqui no es evidente, tiene sus ventajas. Esta transformación de estados, hace a las variables de información ortonormales. Esta característica hace que una version descentralizada de estas ecuaciones sea mucho mas sencilla (Mutambara, 1994).

### 4. APLICACIÓN

En esta sección compararemos el desempeño del nuevo filtro de información sobre el nuevo filtro de Kalman para un problema que fue presentado inicialmente por Athans, M. (1968). La comparación con el filtro extendido de Kalman, no será presentada en este trabajo por encontrarse profusamente demostrada en Julier S. (1995). Se elige este ejemplo debido a sus significativas no linealidades tanto en el proceso como en la observación y a que ha sido extensamente analizado en la literatura.

Deseamos entonces estimar la posición, la velocidad y el coeficiente balístico de un cuerpo, que reingresa a la atmósfera desde una altura muy grande y una velocidad muy grande. La aceleración debida a la gravedad es despreciable comparada con los términos de atracción de la altura y la velocidad. Se restringe al cuerpo a caer ver-

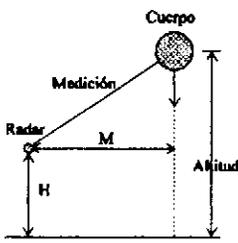


Fig. 4. Geometría del ejemplo

ticamente y se muestrea el recorrido del mismo usando un radar con la presencia de ruido blanco no correlacionado. La geometría del problema se muestra en la fig. 4, donde el radar está a una altura  $H$  de 100.000 ft y la distancia horizontal entre el cuerpo y el radar,  $M$ , es de 100.000 ft. Este sistema tiene tres estados que son la altura en pies ( $x_1$ ), la velocidad en pies por seg. ( $x_2$ ), y el coeficiente balístico en pulgadas por pies ( $x_3$ ). La dinámica del sistema continuo es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + w_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -e^{-\gamma x_1(t)} x_2(t)^2 x_3(t) + w_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= w_3(t) \end{aligned} \quad (44)$$

donde  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  y  $w_3(t)$  son ruidos de media cero y no correlacionados con covarianzas dadas por  $Q(t)$  y  $\gamma$  es una constante de valor  $5 \times 10^{-5}$  que relaciona la densidad del aire con la altura. El recorrido medido por el radar esta dado por

$$z(t) = \sqrt{(M^2 + [x_1(t) - H]^2)} + r(t) \quad (45)$$

donde  $r(t)$  es el ruido de observación, no correlado y con covarianza  $R(t) = 10^4 ft^2$ .

Ambos filtros fueron implementados en el campo discreto y se realizó una observación por segundo. Esto de acuerdo con el experimento original en Athans, M. (1968). Sin embargo, entre instantes es necesario integrar las ecuaciones (44) con un paso pequeño para producir predicciones razonables. Esta complicación adicional no afecta sin embargo la implementación de los nuevos filtros. El sistema fue simulado para obtener el vector de medidas considerado como la observación real, y para comparar resultados.

Los estados iniciales del sistema y de la estimación son

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 300.000 \text{ ft} & \hat{x}_1(0|0) &= 300.000 \text{ ft} \\ x_2(0) &= 20.000 \text{ ft/s} & \hat{x}_2(0|0) &= 300.000 \text{ ft} \\ x_3(0) &= 10^{-3} \text{ ft}^{-1} & \hat{x}_3(0|0) &= 300.000 \text{ ft} \end{aligned} \quad (46)$$

y de la covarianza

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (47)$$

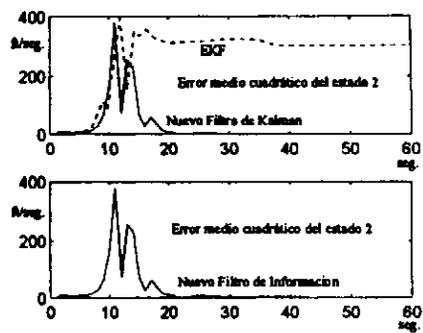


Fig. 5. Error medio cuadrático del estado 2

Por lo tanto, la estimación inicial de la altura y velocidad son correctas, mientras que la estimación inicial de la constante balística es muy mala. Físicamente esto significaría que se asume que el cuerpo es "pesado" mientras que en realidad es liviano. Deseamos ver como converge tanto el filtro de información como el de Kalman en su nueva forma, considerando que  $Q(k) = 0$ . Condición también presente en Athans, M. (1968). En la fig. 5 se muestra la magnitud del error medio de los errores de cada estado. Como se puede observar existe muy poca diferencia entre las estimaciones de los filtros.

## 5. CONCLUSIONES

En este ejemplo se muestra que la derivación de las técnicas presentadas por Julier S. (1995) al filtro de información tienen una exactitud prácticamente igual en la estimación. Sin embargo posee las características básicas que lo hacen preferible en aplicaciones de control descentralizado. La más importante de ellas es la propiedad de ortogonalidad de los estados de información que facilitan la obtención de algoritmos descentralizados y distribuidos (Mutambara, 1994).

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Athans, M., R. P. Wishner and A. Bertolini. *Suboptimal state approximation for continuous-time nonlinear systems for discrete noisy measurements*. IEEE Tr. on Automatic Control, **13**, 504-518
- Julier S., J. Uhlmann and H.F. Durrant-Whyte, (1995). *A new approach for filter Nonlinear Systems*. American Control Conference, Washington.
- Mutambara, A., H. Durrant-Whyte (1994). *Modular scalable robot control*. Proceedings of the 1994 IEEE international conference on multisensor fusion and integration for intelligent systems, **1**, 121-127