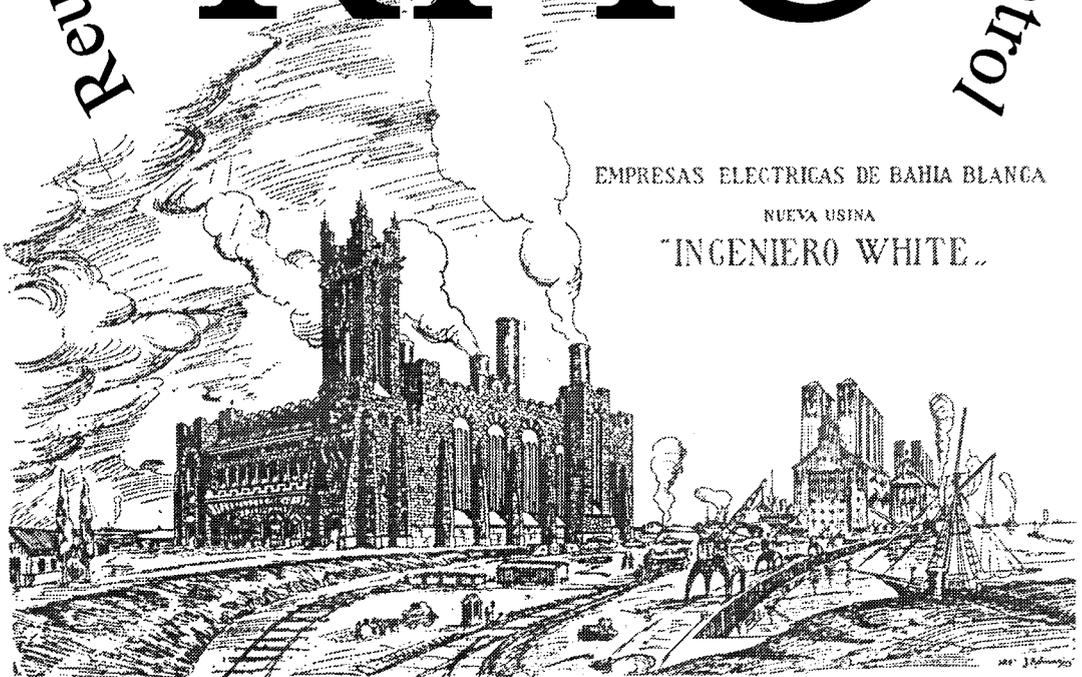


ANALES DE LA

Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control

VI RPIC



EMPRESAS ELECTRICAS DE BAHIA BLANCA
NUEVA USINA
"INGENIERO WHITE.."

Bahía Blanca, 8 al 11 de Noviembre de 1995

VOLUMEN I



IEEE



DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
AV. ALEM 1253 - (8000) BAHÍA BLANCA - ARGENTINA



ASOCIACION ARGENTINA
DE CONTROL AUTOMATICO

VI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control - RPIC '95

Bahía Blanca, 8 al 11 de Noviembre de 1995.

Comisión ejecutiva

Presidente

Ing. Alfredo Desages

Vicepresidentes

Dr. Osvaldo Agamennoni

Dr. Gustavo Bortolotto

Tesoreros

Ing. Pedro Doñate

Dr. María Celeste Colantonio

Secretarios

Dr. Jorge Moiola

Ing. Sylvia Padín

Vocales

Dr. Juan Cousseau

Ing. Guillermo Kalocai

Ing. Héctor Chiacchiarini

Ing. Guillermo Sentoni

Ing. Eduardo Suarez

Ing. Pedro Julián

Dr. Mario Jordán

Ing. Favio Masson

Ing. Pablo Mandolesi

Ing. José Guivant

Ing. Daniel Flores

Ing. Eduardo Paolini

**VI REUNIÓN DE PROCESAMIENTO
DE LA INFORMACIÓN Y CONTROL**

8 al 11 de noviembre de 1995 - Bahía Blanca - ARGENTINA

INDICE GENERAL

| | |
|---|-----|
| Controlling bilinear systems via adaptive techniques. <i>González G. A., Troparevsky M. I.</i> | 241 |
| Lugar de las raíces de sistemas lineales con retardo. Reglas constructivas y procedimiento sistemático. <i>Carranza V. D., Baldini P. N.</i> | 245 |
| Control y simulación para un modelo cinético no lineal de distribución de droga. <i>Cabrera A. I., Godínez I., Gálvez G.</i> | 251 |
| Sliding mode control with nonlinear observer for rotor flux estimation on induction motors. <i>Flores D. J., Chiacchiarini H. G., Desages A. C.</i> | 257 |
| Análisis de un estimador y controlador descentralizado. <i>Masson F., Desages A. C., Bortolotto G. E.</i> | 263 |
| Precisiones sobre el cálculo de la matriz exponencial. <i>Godfrid C., Pérez A.</i> | 269 |
| Análisis de controladores dinámicos basados en redes neuronales para manipuladores robóticos. <i>Patiño D., Carelli R., Kuchen B.</i> | 274 |
| Navegación autónoma de un vehículo basado en reglas y redes neuronales. <i>Dentone F., Rosensztein D. S., Veiga R. A.</i> | 281 |
| Neural network applications to multiloop IMC structures. <i>Basualdo M. S., Ceccatto H. A.</i> | 287 |

Análisis de un estimador y controlador descentralizado

Favio Masson[†], Alfredo Desages[†], Gustavo Bortolotto[†]

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
AV. ALEM 1253 (8000) BAHÍA BLANCA
E-mail: fmasson@criba.edu.ar

Keywords: Control Descentralizado, Estimadores Descentralizados, Filtro de Información.

Resumen

En el presente trabajo se realiza un análisis del comportamiento de un estimador de estados y un controlador óptimo descentralizados, con fusión de la información obtenida a través de sendos sensores. En este análisis se introduce en primer lugar el estimador centralizado, luego la derivación descentralizada, y sobre el final un ejemplo ilustrativo de donde se extraen las conclusiones finales.

1. Introducción

La necesidad de construir y controlar sistemas cada vez más grandes y sofisticados ha llevado al concepto ortodoxo del sistema de alto desempeño manejado por un procesador central a la obsolescencia. Aún más, el uso de múltiples sensores y actuadores ha ido creciendo en importancia y variedad en una numerosa cantidad de aplicaciones. Por lo que si al primer problema le sigue la necesidad de distribución del proceso y descentralización del control, al último punto le sigue la integración y fusión de la información. Un sistema de fusión de datos totalmente descentralizado implica un sistema de procesamiento de datos en el que toda la información es procesada *localmente*. No existe procesamiento central, no hay facilidades de comunicación central y no hay decisiones globales.

Han sido numerosos los investigadores que a través de los años han descrito *control descentralizado* (Sandell, 1978). Por lo que su significado ha ido variando, en algunos casos refiriéndose simplemente a esquemas que involucran más de un controlador. Una aproximación actual y aceptada es aquella que define un sistema *totalmente descentralizado* como un sistema de procesamiento de datos en el cual toda la información está procesada localmente y no hay un procesamiento central. Consiste en una red de nodos con sensores y con su propias facilidades de procesamiento los cuales no requieren ninguna facilidad de fusión o comunicación central.

En este trabajo se utilizan algoritmos de estimación de estados y de control globalmente óptimos, sujetos a las siguientes restricciones:

- Ningún nodo funciona como sitio de procesamiento central para fusión o control y el tamaño y número de nodos son arbitrarios.
- Solamente nodos con estados comunes, observados

por alguno o ambos, se comunican. No hay propagación de información entre dos nodos no conectados.

- Se realizan solamente los cálculos relevantes localmente en el nodo.

Óptimo aquí significa que la estimación o la señal de control en cada nodo es equivalente a la obtenida por el correspondiente sistema centralizado. El concepto de optimalidad es utilizado tradicionalmente en el contexto de los sistemas centralizados, donde el criterio de optimización para un estimador es la minimización de la covarianza mientras que para el controlador es la de minimizar un criterio de desempeño.

La aproximación utilizada en la estimación es la de una variante algebraica del filtro de Kalman, el *filtro de información* (Mutambara, 1994). Considerando luego los problemas de interconexión completa de los nodos, desarrollamos una versión distribuida del mismo. Para el control, diseñado por separado del estimador, se realimenta una ganancia de control determinística óptima. Esta ganancia se calcula a través de la ecuación de *Riccati*, usando el principio de optimalidad.

En este trabajo se presentan dichos desarrollos para el caso centralizado y luego se derivan los correspondientes descentralizados. Se implementan luego sobre un sistema muy demostrativo como es el de cuatro masas conectadas entre sí por resortes, considerando la existencia de fricción. Al final del trabajo se muestran resultados de simulación y líneas futuras de desarrollo.

2. Control Centralizado

2.1 Descripción del sistema

Consideremos un sistema representado por un vector de estados $\mathbf{x}(k)$ en el instante de interés k , cuya dinámica esta representada por (1):

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{D}(k)\mathbf{w}(k-1), \quad (1)$$

[†] CONICET.

[†] CIC.

donde $F(k)$ es la matriz de transición de estados desde $k-1$ a k , mientras que $u(k)$ y $B(k)$ son los vectores y matrices de control respectivamente. Finalmente $w(k) \sim N(0, Q(k))$ es el ruido asociado al proceso modelado como no correlacionado, de media cero con covarianza (2)

$$E[w(i)w^T(j)] = \delta_{ij} Q(i). \quad (2)$$

El sistema es observado conforme a la ecuación discreta lineal (3):

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k), \quad (3)$$

donde $z(k)$ es el vector de observaciones hechas en k , mientras que $H(k)$ es la matriz de observación y $v(k) \sim N(0, R(k))$ es el ruido asociado a la observación modelado como no correlacionado, de media cero con covarianza (4)

$$E[v(i)v^T(j)] = \delta_{ij} R(i). \quad (4)$$

Se utiliza además la siguiente notación para señalar la estimación del estado $x(j)$ en el instante i dada la información hasta el momento j inclusive y la correspondiente varianza (error medio cuadrático) $P(i/j)$ (5):

$$\begin{aligned} \hat{x}(i/j) &= E[x(i)/z(1), \dots, z(j)] \\ P(i/j) &= E[(x(i) - \hat{x}(i/j))(x(i) - \hat{x}(i/j))^T \\ &\quad | z(1), \dots, z(j)] \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 Filtro de información

El filtro de información es esencialmente un filtro de Kalman expresado en términos de las *variables analíticas de información* (Mutambara, 1994). Estas variables se interpretan como *medidas de la cantidad de información* de los parámetros (estados) de interés, en vez de la estimación directa de ellos y su covarianza asociada. El algoritmo del filtro es:

1. Predicción

$$\hat{y}(k/k-1) = L(k/k-1)\hat{y}(k-1/k-1), \quad (6)$$

$$Y(k/k-1) = [F(k)Y^{-1}(k-1/k-1)F^T(k) + Q(k)]^{-1}. \quad (7)$$

1. Estimación

$$\hat{y}(k/k) = \hat{y}(k/k-1) + i(k), \quad (8)$$

$$Y(k/k) = Y(k/k-1) + I(k). \quad (9)$$

Donde se definen:

$$L(k/k-1) = Y(k/k-1)F(k)Y^{-1}(k-1/k-1), \quad (10)$$

que actúa como un coeficiente de propagación independiente de las observaciones hechas, e

$$i(k) = H^T(k)R^{-1}(k)z(k), \quad (11)$$

$$I(k) = H^T(k)R^{-1}(k)H(k), \quad (12)$$

como la contribución de los *estados de información* desde la observación $z(k)$ (11) y la *matriz de información*

asociada (12) respectivamente. La reconstrucción de los estados se hace a partir de:

$$P(k/k) = Y^{-1}(k/k), \quad (13)$$

$$\hat{x}(k/k) = Y^{-1}(k/k)\hat{y}(k/k). \quad (14)$$

Este filtro no es ampliamente usado y está apenas tratado en la literatura. Su uso potencial será comprendido cuando se intente una versión distribuida y descentralizada del mismo. Esto estará facilitado por dos elementos:

- Las ecuaciones de estimación son muy sencillas desde el punto de vista computacional.
- Las ecuaciones de predicción son algo más complicadas pero dependen de un factor (10) que es independiente de las observaciones lo que hace a las ecuaciones simples de desacoplar y descentralizar.

Como observación final, este filtro es mucho más sencillo de inicializar que su contraparte de Kalman. Esto es así porque tanto los estados como la matriz de información son simplemente inicializadas a *información cero*, aunque a los fines prácticos a la matriz se le colocan en la diagonal valores muy pequeños distintos de cero (7).

2.3 Control Óptimo Estocástico

El diseño práctico de controladores estocásticos para sistemas que se asumen *Lineales*, criterios de optimización *Cuadráticos* y entradas de ruido *Gaussianas* (LQG), será el utilizado aquí (Phillips, 1990).

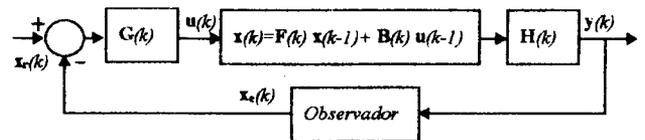


Fig. 1: Esquema de control

Dado el sistema discreto estocástico n -dimensional expresado por las ecuaciones 1, el objetivo es determinar el vector de control $u(k)$ que minimice la función de costo cuadrática,

$$J(N) = E \left[\sum_{i=1}^N \left\{ [x(k) - x_r(k)]^T X(k) [x(k) - x_r(k)] + [u(k)]^T U(k) [u(k)] \right\} \right], \quad (15)$$

donde $X(k)$ es una matriz de costo cuadrada de dimensión n , real y positiva definida que refleja la importancia de mantener las desviaciones de los estados en ciertos valores pequeños. $U(k)$ es una matriz de costo cuadrada de dimensión r , real y positiva definida que refleja la importancia de mantener las desviaciones de las componentes de control en ciertos valores pequeños. El problema aquí planteado consiste en un filtro de información lineal óptimo, en cascada con una matriz de ganancia óptima de realimentación. Bajo las asunciones de LQG, el diseño del controlador estocástico óptimo puede ser separado completamente del diseño del observador. La matriz de ganancia es independiente de toda incertidumbre y por lo

tanto el controlador puede ser diseñado asumiendo que $\mathbf{x}(k)$ es conocido perfectamente en todo momento. De la misma manera el filtro es independiente de las matrices que definen el controlador y también puede ser diseñado por separado. Por lo tanto, el algoritmo de control será,

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{G}(k) [\hat{\mathbf{x}}(k/k) - \mathbf{x}_r(k/k)], \quad (16)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}(k/k)$ está dado por la ecuación (14) y la ley de control es generada como sigue,

$$\mathbf{G}(k) = [\mathbf{U}(k) + \mathbf{B}^T(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{B}(k)]^{-1} \cdot [\mathbf{B}^T(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{F}(k)], \quad (17)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{X}(k) + [\mathbf{F}^T(k)\mathbf{K}(k+1)] \cdot [\mathbf{F}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{G}(k)]. \quad (18)$$

3. Control Descentralizado.

Para obtener una versión descentralizada del estimador tomamos el filtro de información desarrollado y lo repetimos en cada nodo. Luego particionamos tanto las variables de observación como las de información entre ellos, esto es, las variables accesibles en el nodo y las que se deben obtener de la comunicación con los restantes.

Desacoplando la ley de control correspondiente empleando los principios de *separación y certeza equivalente*, y conectando los resultados al nuevo filtro, obtenemos un control totalmente descentralizado. Para que este sistema sea equivalente al centralizado, todos los nodos se deben comunicar, definiendo una red de control totalmente conectada. Las ventajas de esta aproximación sobre su contraparte centralizada son:

- **Modularidad.** Como todo el proceso debe hacerse localmente, y no se requiere *a priori* ningún conocimiento global de la red, los nodos pueden ser construidos y programados en módulos.
 - **Robustez.** Como el desempeño del sistema no depende de un único procesador, sale airoso por una falla del canal de comunicación. Por lo tanto es mucho más robusto.
 - **Flexibilidad.** Ya que no existe un nodo central y tampoco se necesita conocimiento previo de la topología de la red, el sistema es flexible al agregado o pérdida de nodos, y al cambio dinámico de la estructura de la red.
- Sin embargo existen inconvenientes y limitaciones:
- **Conectividad.** La asunción de una topología totalmente conectada no es en general realista. Si el número de nodos, N , se incrementa, el número de conexiones requeridas para cada nodo será $N-1$, y el conjunto total de conexiones se incrementará en $N!/2!(N-2)!$. Esta extensión física de conexiones puede fácilmente no ser soportada por el hardware.
 - **Cálculo.** Los modelos locales son del mismo tamaño que aquellos de la versión central, por lo tanto no hay un ahorro significativo de requerimientos de memoria y/o carga de cálculo.
 - **Comunicación.** Existe una redundancia excesiva en

las comunicaciones. Nodos que no necesitan comunicarse lo hacen. Por lo tanto, hay un gasto, tanto en términos del número de conexiones como en el de mensajes a través de ellas.

Sin embargo veremos en el siguiente punto que es posible erradicar esos problemas reteniendo las ventajas de la descentralización.

4. Control Distribuido Descentralizado.

En este punto se presenta la distribución del modelo en un sistema descentralizado y se traslada ese resultado al control. La distribución del modelo es el proceso de construir modelos reducidos del sistema global, creando vectores de estado locales que resulten en los relevantes para el nodo, tal que exista una equivalencia dinámica entre el modelo local y el global (Mutambara, 1994).

4.1 Filtro de información distribuido-descentralizado

El vector de estados nodal, $\mathbf{x}_j(k)$ está relacionado con el vector de estados global de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_j(k) = \mathbf{T}_j(k) \mathbf{x}(k), \quad (19)$$

donde $\mathbf{T}_j(k)$ es la matriz de transformación nodal, lineal y rectangular. El modelo de observación $\mathbf{H}(k)$ es reemplazado por la matriz de observación local $\mathbf{C}_j(k)$, lo que nos da la siguiente ecuación de observación:

$$\mathbf{z}_j(k) = \mathbf{C}_j(k) \mathbf{x}_j(k) + \mathbf{v}_j(k). \quad (20)$$

Como resultado la nueva ecuación de transición de estados será:

$$\mathbf{x}_j(k+1) = \mathbf{F}_j(k) \mathbf{x}_j(k) + \mathbf{B}_j(k) \mathbf{u}_j(k) + \mathbf{D}_j(k) \mathbf{w}_j(k), \quad (21)$$

donde $\mathbf{w}_j(k)$ se asume no correlacionado. Los modelos globales se distribuyen como sigue. Multiplicamos la ecuación de transición global (1) por $\mathbf{T}_j(k+1)$. Sustituyendo la distribución de estados (19) en (21) e igualando ambos resultados obtenemos:

$$\mathbf{F}_j(k) = \mathbf{T}_j(k+1) \mathbf{F}(k) \mathbf{T}_j^+(k), \quad (22)$$

$$\mathbf{D}_j(k) = \mathbf{T}_j(k+1) \mathbf{D}(k) \mathbf{T}_j^+(k), \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_j(k) \mathbf{G}_j(k) = \mathbf{T}_j(k+1) [\mathbf{B}(k) \mathbf{G}(k)] \mathbf{T}_j^+(k). \quad (24)$$

En (24) $[\mathbf{B}_j(k) \mathbf{G}_j(k)]$ y $[\mathbf{B}(k) \mathbf{G}(k)]$ son las ganancias de control efectivas nodal y global respectivamente. $\mathbf{T}_j^+(k)$ es la inversa generalizada de $\mathbf{T}_j(k)$. La matriz de transformación internodal $\mathbf{T}_{ji}(k)$ mapea información y parámetros desde el subespacio de información j -ésimo al subespacio i -ésimo. Considerando el caso donde $\mathbf{T}_j(k)$ y $\mathbf{T}_i(k)$ es de rango de fila completo, y ($n_i \leq n$ & $n_j \leq n$), donde n_i , n_j y n son los números de filas en $\mathbf{T}_i(k)$ y $\mathbf{T}_j(k)$ y $\mathbf{x}(k)$ respectivamente, entonces:

$$\mathbf{T}_{ji}(k) = \{\mathbf{T}_i(k) \mathbf{T}_i^+(k)\} \mathbf{I}_j(\mathbf{z}_j(k)) \mathbf{I}_j^+(\mathbf{z}_j(k)). \quad (25)$$

Aplicando estos resultados y luego de un trabajo algebraico se obtienen las siguientes expresiones para la predicción y estimación:

1. Predicción

$$\hat{\mathbf{y}}_i(k/k-1) = \mathbf{L}_i(k/k-1) \hat{\mathbf{y}}_i(k-1/k-1), \quad (26)$$

$$Y_i(k/k-1) = [F_i(k)Y_i^{-1}(k-1/k-1)F_i^T(k) + Q_i(k)]^{-1}, \quad (27)$$

donde $Q_i(k) = T_j(k+1)D(k)T_j^T(k)$.

1. Estimación

$$\hat{y}_i(k/k) = \hat{y}_i(k/k-1) + \sum_{j=1}^N [T_{ji}(k) i_j(z_j(k))], \quad (28)$$

$$Y_i(k/k) = Y_i(k/k-1) + \sum_{j=1}^N [T_{ji}(k) I_j(z_j(k)) T_{ji}^T(k)], \quad (29)$$

donde

$$L_i(k/k-1) = Y_i(k/k-1)F_i(k)Y_i^{-1}(k-1/k-1), \quad (30)$$

es el coeficiente de propagación local, independiente de las observaciones hechas, $T_{ji}(k)$ según se definió en (25), e:

$$i_j(z_j(k)) = [C_j^T(k)R_j^*(k)]z_j(k), \quad (31)$$

$$I_j(z_j(k)) = [C_j^T(k)R_j^*(k)]C_j(k), \quad (32)$$

son los estados de información locales del nodo j basados solamente en las observaciones de dicho nodo (31) y la matriz de información local asociada (32). La reconstrucción de los estados locales se hace a través de:

$$\hat{x}_i(k/k) = Y_i^{-1}(k/k)\hat{y}_i(k/k). \quad (33)$$

4.2 Control Descentralizado escalable

Aquí extenderemos los resultados presentados en el punto anterior al problema del control. También aquí se utilizará el diseño de controladores estocásticos para sistemas que se asumen LQG. La idea es que además de utilizar múltiples sensores, es útil o imprescindible el uso de múltiples actuadores. El objetivo entonces es obtener un algoritmo de control en cada nodo el cual esté expresado enteramente en las variables de información. Más aún, el vector de control local es único para cada nodo. Es claro de (33) que la estimación usada para calcular la ley de control no será la misma para cada nodo. El vector de control expresado en términos de información será:

$$u_i(k) = -G_i(k)[\hat{x}_i(k/k) - x_r(k)] = -\Omega_i(k/k)\delta_i(k), \quad (34)$$

donde se define el error local de información como:

$$\delta_i(k) = \hat{y}_i(k/k) - Y_i(k/k)x_r(k), \quad (35)$$

y la ganancia local de control:

$$\Omega_i(k/k) = G_i(k)Y_i^{-1}(k/k). \quad (36)$$

La ganancia de control local $G_i(k)$ se calcula a partir del modelo local $F_i(k)$, las matrices de costo del tipo de las definidas en (15) $X_i(k)$ y $U_i(k)$ y la matriz de Riccati $K_i(k)$:

$$G_i(k) = [U_i(k) + B_i^T(k)K_i(k)B_i(k)]^{-1}[B_i^T(k)K_i(k)F_i(k)], \quad (37)$$

$$K_i(k) = X_i(k) + [F_i^T(k)K_i(k+1)][F_i(k) - B_i(k)G_i(k)]. \quad (38)$$

4.3 Resolución de la transformación nodal, $T_i(k)$

Una aproximación para la definición de $T_i(k)$ es una matriz que arbitrariamente tome estados o combinaciones de ellos desde el vector de estados global $x(k)$. Sin embargo, esto puede traer problemas con el intercambio de información entre nodos. Esto es, puede presentarse la necesidad de propagar información entre dos nodos desconectados que tienen estados comunes en la definición de $T_i(k)$. La idea es tomar un sistema cualquiera y determinar cómo el modelo y el vector de estados puede ser distribuido mientras satisfaga esta restricción en la comunicación. Para esto, en principio se debe identificar *qué se necesita saber* localmente, y luego distribuir el modelo según esta base (Aoki, 1968; Sandell, 1978).

4.4 Reconstrucción de las variables globales

La necesidad de obtener a partir del modelo distribuido (reducido) las variables globales o parte de ellas se asocia a la necesidad de monitoreo o extracción de información del proceso. Este problema requiere resolver la siguiente ecuación:

$$T_i(k) x(k) = x_i(k). \quad (39)$$

La inversa generalizada o de Moore-Penrose, es una manera elegante de resolver ecuaciones de esta naturaleza, y provee la mejor solución aproximada dada por:

$$x_g(k) = T_i^+(k) x_i(k); \quad (40)$$

es la mejor en el sentido que $\| T_i(k) x(k) - x_i(k) \|$ es minimizada por:

$$\| T_i(k) x_g(k) - x_i(k) \| = \min \| T_i(k) x(k) - x_i(k) \|, \quad (41)$$

en la norma de vectores euclídea. Por lo tanto $x_g(k)$ es la solución en mínimos cuadrados del sistema descrito por la ecuación (39).

5. Ejemplo de aplicación

Consideremos un sistema de masas como se muestra en la Fig. 2. Este sistema consiste en cuatro masas rodantes interconectadas por resortes. La entrada en cualquiera de las masas afecta a las otras. Se eligió porque a pesar de su simpleza contiene todas las características necesarias de un sistema dinámico interconectado, con multiplicidad de sensores y actuadores.

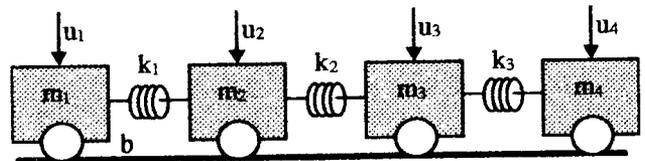


Figura 2: Sistema de masas acopladas

5.1 Modelo del sistema

Las ecuaciones continuas que modelan este sistema están dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + (b/m_1)\dot{p}_1 + (k/m_1)(p_1 - p_2) &= (u_1/m_1) \\ \ddot{p}_2 + (b/m_2)\dot{p}_2 + (k/m_2)(2p_2 - p_1 - p_3) &= (u_2/m_2) \\ \ddot{p}_3 + (b/m_3)\dot{p}_3 + (k/m_3)(2p_3 - p_2 - p_4) &= (u_3/m_3) \\ \ddot{p}_4 + (b/m_4)\dot{p}_4 + (k/m_4)(p_4 - p_3) &= (u_4/m_4) \end{aligned} \quad (42)$$

donde b es la fricción, $k_1 = k_2 = k_3$ son las constantes de los resortes y m_i las masas correspondientes.

Considerando como estados del modelo las posiciones (p_i) y velocidades (\dot{p}_i) de cada una de las masas (43), dándole valores a las constantes y discretizando utilizando el método de las series obtenemos las siguientes matrices del sistema discretizado (44, 45, 46), equivalentes a un sistema del tipo del presentado en (1) y (3):

$$\mathbf{x}^T = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]^T = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ \dot{p}_1 \ \dot{p}_2 \ \dot{p}_3 \ \dot{p}_4]^T \quad (43)$$

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.003 \\ -0.03 & 0.03 & 0 & 0 & 0.91 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03 & -0.06 & 0.03 & 0 & 0 & 0.91 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & -0.06 & 0.03 & 0 & 0 & 0.91 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 & -0.03 & 0 & 0 & 0 & 0.91 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbf{B}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.003 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

5.2 Elección de la Matriz de Transformación T_i

Consideremos la posición y la velocidad de una masa general j , dada por:

$$\mathbf{x}_j^m(k) = \begin{bmatrix} x_j \\ \dot{x}_j \end{bmatrix} \quad (47)$$

El vector global de estados $\mathbf{x}(k)$, que consiste en todos los estados del sistema está dado por la ecuación (43). Consideremos el nodo j que estima y controla la posición y velocidad de la masa j . Desde la matriz de transición de estados se observa que el vector de estados local $\mathbf{x}_j^m(k)$ y el vector de control $\mathbf{u}_j(k)$ dependen directamente de los vectores de estados $\mathbf{x}^{m_{j-1}}(k-1)$, $\mathbf{x}_j^m(k-1)$ y $\mathbf{x}^{m_{j+1}}(k-1)$. Por ejemplo, para la estructura de la figura 2, los vectores $\mathbf{x}_1^m(k)$ y $\mathbf{u}_1(k)$ dependen directamente de los vectores $\mathbf{x}_0^m(k-1)$, $\mathbf{x}_1^m(k-1)$ y $\mathbf{x}_2^m(k-1)$. Esto determina entonces el vector de estados local $\mathbf{x}_j(k)$ que contiene toda la información necesaria en el nodo j con el objetivo de esti-

mar y controlar efectivamente la masa j localmente. Entonces los modelos de estados locales serán:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(k) &= [x_0 \ x_1 \ x_4 \ x_5]^T \\ \mathbf{x}_1(k) &= [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \\ \mathbf{x}_2(k) &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_5 \ x_6 \ x_7]^T \\ \mathbf{x}_3(k) &= [x_2 \ x_3 \ x_6 \ x_7]^T \end{aligned} \quad (48)$$

De esta manera el vector de estados globales $\mathbf{x}(k)$ es distribuido en vectores locales $\mathbf{x}_j(k)$, conteniendo solamente estados relevantes localmente. Las correspondientes matrices de transformación nodal son obtenidas a partir de la ecuación 19:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_1(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_2(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_3(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

Dado un sistema físico, la matriz $T_j(k)$ depende únicamente de los estados que físicamente influyen unos con otros, esto es, dependen de la matriz de transición de estados $F(k)$, que expresa de qué manera unos estados influyen en otros de un paso a otro de tiempo. En general los elementos de $T_j(k)$ no son solamente unos y ceros; éstos pueden tomar diferentes valores que provienen de trabajar algebraicamente con la matriz $F(k)$. Como referencia de otras maneras de obtener esta matriz de transformación nodal se puede consultar Mutambara, (1994).

5.3 Resultados de simulación

En las siguientes figuras se muestran las respuestas del sistema simulado, del estimador centralizado y del descentralizado. Esto para una entrada escalón sobre la masa m_1 , manteniendo la referencia de las masas restantes en cero.

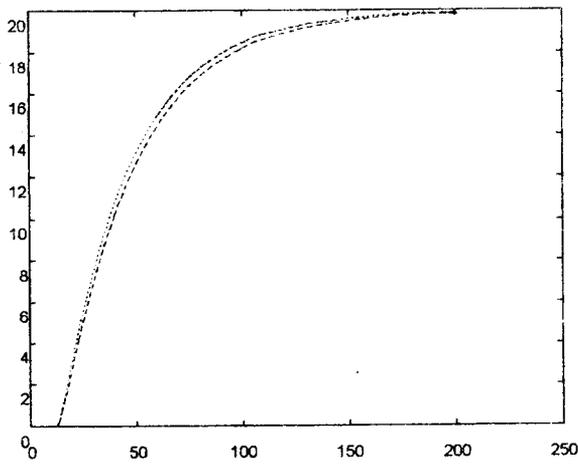


Fig. 3: Respuesta del estado x_1 a una entrada escalón. (Sistema lin.cont., -- Estim. Central., .. Estim. Descentr.)

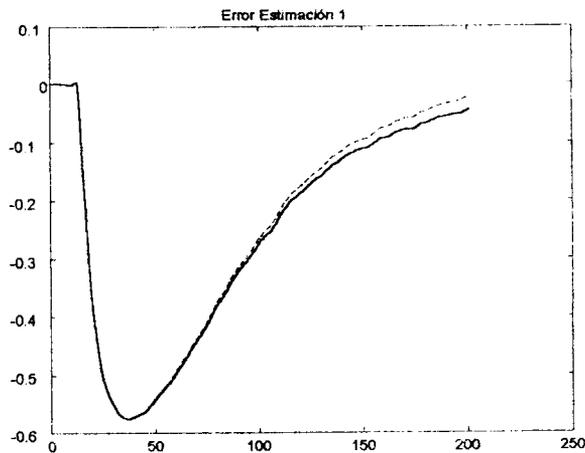


Fig. 4: Error entre el estado simulado del sistema y el estado estimado centralizado(--) y descentralizado

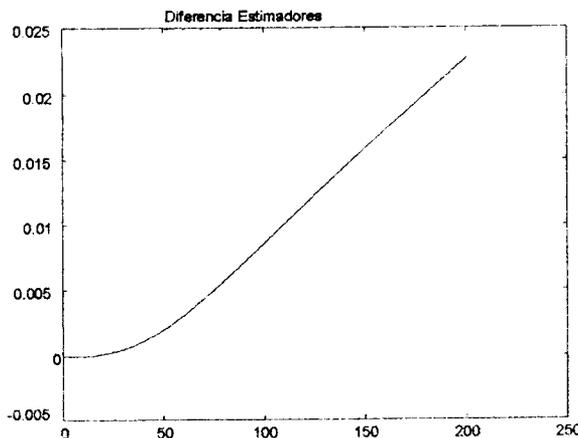


Fig. 5: Diferencia entre el estado estimado centralizado y descentralizado

En la figura 3 se observan superpuestas las respuestas del sistema simulado y los estimadores ante una entrada escalón en la referencia de la posición de la masa m_1 , manteniendo el resto de las referencias en cero. En la figura 4 se presenta el error entre la respuesta del sistema y la de cada uno de los estimadores, el centralizado y el descentralizado. Por último, en la figura 5, se observa la diferencia entre la estimación hecha con el conjunto es-

timador-controlador centralizado y su versión descentralizada.

6. Análisis y conclusiones

De las respuestas presentadas, se observa que la pérdida de información o desempeño entre el sistema centralizado y su versión descentralizada y distribuida, es prácticamente nula. Esto se deriva de los métodos de reducción de modelos y las condiciones necesarias para su funcionamiento.

En cuanto a la necesidad de reducción del modelo localmente (distribución) y el uso de una comunicación local entre nodos permite eliminar las desventajas expuestas propias de la descentralización. La topología de la red está definida por el modelo y por lo tanto no existe necesidad de propagar información entre nodos desconectados; esto es, nodos que no comparten información relevante entre ellos.

Las técnicas para realizar la reducción del modelo, que podemos presentar como basadas en la estructura del modelo global, aquí son desarrolladas en su versión más simple. Sin embargo, son generales y solo necesitan del conocimiento de la matriz $F(k)$.

Agradecimientos

Agradecemos las importantes y clarificadoras conversaciones con el Dr. Mario Jordan, y fundamentalmente el apoyo del Dr. Mario Nebot.

Referencias

- Aoki, M. "Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation". *IEEE Trans. On Aut. Control*, 13, 3, 246-253 (1968).
- Gantmacher, F.R.. *The Theory of Matrices*. Vol 1 y 2. Nueva York, Chelsea Publishing Company (1960).
- Mutambara, A. G. O., *Decentralized Estimation and Control with Applications to a Modular Robot*. D. Phil Thesis, Universidad de Oxford (1994)
- Mutambara, A. G. O., H. F. Durrant-Whyte. "Modular Scalable Robot Control". *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, 121-127 (1994)
- Phillips, Ch., H. T. Nagle, *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice Hall, New Jersey (1990).
- Sandell, N.R., H. F. Varaiya, M. Athans, M. Safonov. "Survey of Decentralized Control Methods for large Scale Systems". *IEEE Trans. On Aut. Control*, 23, 2, 108-128 (1978).