d.- <u>Relaciones entre magnitudes físicas: cuadrados mínimos.</u>

Con saber medir una magnitud física dada y valorar el resultado de la medición desde el punto de vista de su significado estadístico, no está terminado el asunto. Esto solo es el primer paso. La "física en serio" solo comienza cuando se estudia la <u>interdependencia causal</u> entre dos o más magnitudes físicas entre sí. En otras palabras, para establecer leyes físicas con las cuales se pueda predecir la evolución de un sistema dado es necesario previamente descubrir experimentalmente el tipo de relación que hay entre los valores numéricos de las magnitudes intervinientes y representar esta dependencia matemáticamente.

Como en la práctica estos valores numéricos están todos afectados de errores de medición o fluctuaciones intrínsecas, es necesario aplicar un algoritmo que permita determinar algo así como "la relación más probable" entre dos magnitudes físicas, vinculadas <u>causalmente</u> en un proceso físico.

J. Roederer - Mecánica Elemental

Comencemos por el caso más simple: supongamos que dos magnitudes y, x están vinculadas linealmente (por ejemplo, la longitud de un resorte y la fuerza aplicada, la presión en un punto de un líquido y la distancia a la superficie):

Sea ahora una relación lineal entre dos magnitudes físicas y,x (por ejemplo, la longitud de un resorte y la fuerza aplicada, la presión en un punto de un líquido y la distancia a la superficie):

$$y = ax + b .$$

Sea el problema determinar los coeficientes a y b experimentalmente, a partir de la medición de x e y. Si no hubiera error en las mediciones de x e y, bastará hacer dos pares de mediciones x_1y_1 y x_2y_2 y resolver el sistema:

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b .$$

Desgraciadamente, ello nunca ocurre en la práctica. Debemos partir de una serie de pares de valores correspondientes $(x_1,y_1; x_2,y_2; \dots; x_n,y_n)$, los cuales, debido a sus errores, nunca satisfacen exactamente la relación $y = ax + b$. En otras palabras, la diferencia $y_i - ax_i - b = \varepsilon_i$ nunca será cero. Los valores de ε_i serán positivos y negativos. Procedamos como en el caso de una sola variable. La suma de los cuadrados $\sum \varepsilon_i^2$ nos dará una cierta idea de las fluctuaciones (ahora combinadas) de x_i,y_i. Evidentemente, esa suma depende de los coeficientes a y b en la forma:

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum (y_i - ax_i - b)^2 =$$

$$= a^2 \sum x_i^2 + b^2 N - 2a\sum x_i y_i - 2b \sum y_i + 2ab \sum x_i + \sum y_i^2 .$$

Esto es una función cuadrática de a y b que pasa por un mínimo para un dado par de valores a y b. Podemos aplicar el criterio conocido, de elegir como valores más probables de a y b aquellos que hacen mínima a $\sum \varepsilon_i^2$. O sea, a y b serán soluciones del sistema (condición de extremo):

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial b} = 0$$

O sea:

$$2a\sum x_i^2 - 2\sum x_i y_i + 2b\sum x_i = 0$$

$$2Nb \quad - 2\sum y_i + 2a\sum x_i = 0$$

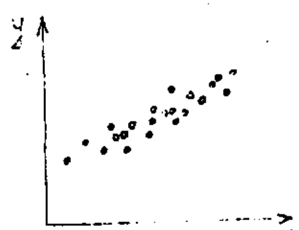
y cuyas soluciones serán:

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad \ldots(1.11)$$

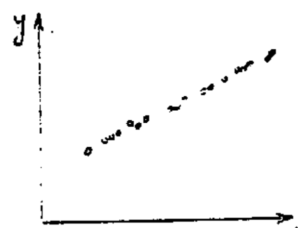
$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Cada uno de estos valores tiene a su vez un error. Para ello hay expresiones algo complicadas que pueden consultarse en los libros.

Veamos algo sobre la interpretación gráfica del método de cuadrados mínimos. Representemos en el plano (x y) los pares de valores medidos x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n. Si éstos obedecen a una relación lineal, y si carecen de errores, caerían exactamente sobre una recta de pendiente a y de ordenada origen b. Pero debido a las fluctuaciones casuales en las mediciones de x e y, los puntos formarán una "nube" que se condensará tanto más en las vecindades de una recta cuanto menores sean las fluctuaciones:



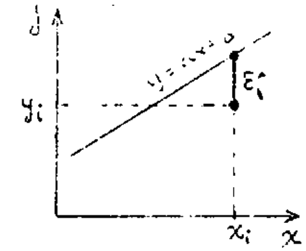
mucha fluctuación



poca fluctuación

Los coeficientes a y b determinados por el método de los cuadrados mínimos son los parámetros de una recta para la cual $\sum \varepsilon_i^2$

es mínimo. Pero obsérvese en el plano (x y) que $\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$ es precisamente la distancia vertical del punto experimental a la recta. La recta por cuadrados mínimos es entonces aquella para la cual la suma de las distancias verticales (en realidad sus cuadrados) es mínima. Esto permite, con un poco de experiencia, trazar "a ojo" la recta por cuadrados mínimos, y determinar así gráficamente los coeficientes de la relación lineal. Muchas veces, esto es suficiente para la práctica.



Obsérvese finalmente que el método de cuadrados mínimos puede aplicarse a relaciones no lineales, como por ejemplo la

$$y = bx^a \qquad y = be^{ax} \qquad y = \frac{a}{b+x}$$

Bastará para ello transformarlas en una relación lineal. En el caso de estos ejemplos, ello se consigue tomando de la siguiente manera:

$$\lg y = \lg b + a\lg x \qquad \lg y = ax + \lg b \qquad 1/y = \frac{b}{a} + \frac{x}{a}$$

y tratar ahora los pares de valores lg y , lg x ; lg y , x ; $\frac{1}{y}$, x como datos en una relación lineal, a los que se pueden aplicar directamente las fórmulas (1.11) .