DINÁMICA DE LAZO ABIERTO MULTIVARIABLE.

ANDRÉS GARCÍA

Abstract. En estas notas se presenta una introducción al análisis de las soluciones en forma cerrada de sistemas de control lineales invariantes en tiempo (extraído de [2]).

1. Soluciones Analíticas de Sistemas Lineales Invariantes en Tiempo

Recordemos que un sistema Lineal Invariante en Tiempo (LTI) puede ser escrito en variables de estado como:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot u(t) \\ y = C \cdot X(t) \end{cases}$$

donde $x \in \Re^n$, $y \in \Re^m$ y $u \in \Re^r$. Por ser un sistema de ecuaciones diferenciales ordianras lineales con coeficientes constantes, es posible obtener:

$$X(t) = \int_0^t \quad e^{A\cdot(t-\sigma)} \cdot B \cdot u(\sigma) \cdot d\sigma$$

Claramente la salida puede ser obtenida:

$$y(t) = C \cdot \int_0^t \quad e^{A\cdot(t-\sigma)} \cdot B \cdot u(\sigma) \cdot d\sigma$$

Notemos que dependiendo de la señal elegida para $u(t)$ se tendran difrentes comportamientos para $X(t)$.

1.1. **Respuesta al escalón.** Ya habíamos estudiado la respuesta al escalón para sistemas LTI escritos usando la trasnformada de Laplace para sistemas de una entrada una salida (SISO). Ahora es posible estudiar la respuesta al escalón de sistemas LTI Multivariables utilizando la solución en forma cerrada recién presentada:

$$X(t) = \int_0^t \quad e^{A\cdot(t-\sigma)} \cdot B \cdot d\sigma$$

donde:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Asumiendo que existe la inversa de la matríz A, se puede calcular la integral y obtener (ver [1]):

$$X(t) = A^{-1}\left(e^{A\cdot t} - I\right) \cdot w \tag{1.1.1}$$

donde I es la matríz identidad y:

$$w = \sum_j b_{ij}$$

siendo b_{ij} el elemento $i - j$ de la matríz B. El principal obstáculo para obtener un análisis de la respuesta en (1.1.1) es el cálculo de la matríz exponencial $e^{A\cdot t}$, para ello se poseen muchos métodos (según el caso, ver [1]) pero asumiendo que se puede obtener la forma canónica de Jordan (método 16 de [1]), se tiene:

$$e^{A\cdot t} = M \cdot e^{\Lambda\cdot t} \cdot M^{-1}$$

donde M es una matríz que contiene los autovectores de la matríz A y $e^{\Lambda\cdot t}$ es una matríz diagonal calculada con los autovalores de A:

$$e^{\Lambda\cdot t} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

siendo $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ los autovalores de A.

2. Estabilidad

A partir de las soluciones en forma cerrada de las secciones precedentes, es claro que la estabilidad (tendencia a un punto de equilibrio estable) de un sistema LTI depende únicamente de los autovalores de la matríz A.

En resumen podemos concluir lo siguiente:

- La estabilidad del sistema es independiente de si se estudia el vector de estados X o la salida y, porqué?
- Para sistemas no-lineales la estabilidad en cercanías de un punto de equilibrio depende de los autovalores del jacobiano del campo vectorial no-lineal.
- Los autovalores del sistema LTI se calculan como: $det(\lambda\cdot I - A) = 0$. Porqué podemos concluir que un sistema LTI es estable si todos sus autovalores tienen parte real negativa?

References

[1] Cleve Moler and Charles Van Loanz,Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five years Later, SIAM REVIEW . Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003, 45, Número 1, páginas 1-46.

[2] Babatunde A. Ogannaike and W. Harmon Ray, Process Dynamics, Modeling, and Control, Oxford Uniersity Press, 1994.