

# TUTORIAL DE LINEALIZACIÓN

ANDRÉS GARCÍA, OSVALDO AGAMENNONI Y JOSÉ FIGUEROA

RESUMEN. En este tutorial encontrará una guía rápida a cerca de la linealización de sistemas de control no-lineales o lo que es más formal, la aproximación de sistemas de control no-lineales con sistemas lineales.

## INTRODUCCIÓN

Sabemos que en general, para los sistemas de control no-lineales:  $\dot{x} = f(x, u)$ , no existen metodologías sistemáticas como para el caso de los sistemas lineales. Por este motivo, una interesante idea consiste en utilizar un sistema de control lineal que aproxime otro no-lineal bajo estudio.

En éste punto, debe definirse cuidadosamente lo que significa que un *sistema aproxime a otro*. Una forma de definirlo es requerir que las trayectorias (variables de estado) de ambos sistemas estén siempre dentro de un dominio acotado.

De manera formal, esto significa:

$$(0.0.1) \quad \begin{array}{l} \text{Dado el sistema:} \\ \dot{x} = f(x, u) \\ \text{Utilizar otro sistema aproximante:} \\ \dot{\tilde{x}} = A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{u} \end{array}$$

Requiriendo:

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \lambda$$

al menos para un cierto entorno de un punto de equilibrio. Ahora bien, porque decimos *de un punto de equilibrio*?

Para responder ésta pregunta, debemos recordar como se calculan los puntos de equilibrio:

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow 0 = f(x^*, u^*)$$

Notemos que existen dos vectores de equilibrio:  $\{x^*, u^*\}$ , esto indica que en el estado de equilibrio  $x^*$  se tiene una acción de control  $u^*$ , necesaria para mantenerse en ese equilibrio....

En éste sentido, los puntos de equilibrio son puntos de reposo del sistema (derivadas iguales a cero), por eso y en analogía con el caso de  $\mathbb{R}^1$  sabemos que fuera de estos puntos (derivadas no nulas) se produce un aumento más rápida de la diferencia  $x - \tilde{x}$  volviendo muy reducida la zona de validez de la aproximación.

Otra forma de analizar la necesidad de los equilibrios es como se verá a continuación.

## 1. TAYLOR: LA MEJOR APROXIMACIÓN

Sin recurrir a las cuestión de los equilibrios, podríamos preguntarnos como calcular las matrices  $\{A, B\}$  en (0.0.1), si bien es cierto que cualquier par de matrices sirve para el propósito de aproximación de sistemas de control, deberá existir una para la cual la región de validez (el entorno) sea máxima y dicha región viene dada por la serie de Taylor truncada en el término lineal (ver [1], pp. 166, pp.197 y pp.227)

$$f(x, u) \cong f(x^*, u^*) + \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x^*, u^*} \cdot (x - x^*) + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{x^*, u^*} \cdot (u - u^*)$$

Inmediatamente vemos que si buscamos aproximar  $f(x, u)$  con un sistema de control lineal:  $A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{u}$ , entonces necesitamos:

$$\begin{cases} f(x^*, u^*) = 0 \\ \tilde{x} = x - x^* \\ \tilde{u} = u - u^* \end{cases}$$

Ahora es más claro porque evaluamos nuestra aproximación en los puntos de equilibrio:  $f(x^*, u^*) = 0 \Leftrightarrow$  Puntos de equilibrio!

Pero entonces lo que hacemos es aproximar  $f(x, u)$  y no los estados?. Justamente! Aproximando el campo vectorial  $f(x, u)$  en los puntos de equilibrio, se obtiene otro sistema de control cuyos estados aproximan los estados reales.

Como podemos ver esto?. Una manera es recordar que el Teorema de Taylor nos dice:

$$|f(x, u) - (A \cdot x + Bu)| \leq \lambda$$

para un cierto entorno de los puntos de equilibrio como habíamos dicho!. Ahora bien:

$$| \underbrace{f(x, u)}_{\dot{x}} - \left( A \cdot \underbrace{x}_{\tilde{x} + x^*} + B \underbrace{u}_{\tilde{u} + u^*} \right) | \leq \lambda$$

Esto es:

$$| \dot{x} - \underbrace{(A \cdot (\tilde{x} + x^*) + B(\tilde{u} + u^*))}_{\dot{\tilde{x}}} | \leq \lambda$$

ya que  $A \cdot x^* + b \cdot u^* = 0$  por ser equilibrios!. Esto nos indica:

$$| \dot{x} - \dot{\tilde{x}} | \leq \lambda$$

Esto nos muestra que la diferencia entre nuestros estado aproximantes  $\tilde{x}$  y los verdaderos  $x$  pueden alejarse mucho unos de otros si nos movemos lejos de los equilibrios!

## 2. PROCEDIMIENTO SISTEMÁTICO DE LINEALIZACIÓN

Ahora que hemos repasado lo que significa linealizar, estamos en condiciones de establecer el procedimiento sistemático:

1. Obtener los puntos de equilibrio  $\{x^*, u^*\}$ :  $f(x^*, u^*) = 0$
2. Calcular:  $A = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} |_{x^*, u^*}$ ,  $B = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} |_{x^*, u^*}$
3. Escribir el modelo en variables de desviación:

$$\dot{x} - \dot{x}^*(t) = A \cdot (x - x^*) + B \cdot (u - u^*)$$

Para las salidas el procedimiento es similar:

$$\tilde{y} = \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} |_{x^*, u^*} \cdot \tilde{x}$$

donde las salidas del sistema original vienen dadas por:  $y = h(x, u)$ .

## 3. EJEMPLOS

Hemos visto un procedimiento de linealización donde la planta posee una entrada de control, que sucede si el sistema es de lazo abierto? Cuál es la entrada y como aplicamos el método, entonces?

Podemos responder a éstas preguntas podemos considerar los siguientes ejemplos:

**3.1. Sistema masa-resorte.** Tomando un sistema masa-resorte como se muestra en la Figura 1, donde la fuerza recuperadora del resorte posee una expresión no-lineal:

$$f(y) = y^2$$

De ésta forma, las ecuaciones de movimiento resultan:

$$m \cdot \ddot{y}(t) = y(t)^2 - m \cdot g$$

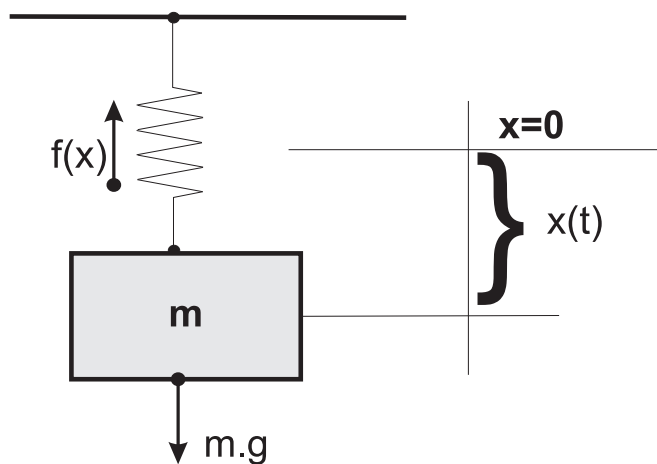


FIGURA 1. Sistema masa-resorte no-lineal.

TABLA 1. Matrices  $A$  y  $B$  del Ejemplo 1.

A	B
$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big _{x^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{g}{m}} & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{\partial f(x)}{\partial u} \Big _{x^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Problema: El método visto funciona para sistemas del tipo:  $\dot{x}(t) = f(x, u)$ , pero en este caso tenemos:  $\ddot{y}(t) = f(y)$ , como transformamos un sistema de orden dos en uno de primer orden?

Una forma genérica de convertir un sistema de orden  $n$  en un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, es generar variables auxiliares. En el presente ejemplo sería:

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = \dot{y}(t) \end{cases}$$

Entonces tendremos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = \frac{1}{m} \cdot x_1(t)^2 - g \end{cases}$$

Como queda entonces el vector (campo vectorial)  $f(x)$ ?, en este caso es un vector de dos componentes, ya que el vector  $x(t)$ , tiene dos componentes:  $x = [x_1, x_2]'$ .

De ésta forma:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m} \cdot x_1^2 - g \end{bmatrix}$$

Como habiamos postgrado el análisis de las entradas de este ejemplo hasta este punto, cabe ahora preguntarnos: cuál es la entrada de control? Será un sistema a lazo abierto?

En efecto! No se poseen entradas y por ello podríamos clasificarlo como un sistema *autónomo* o *no actuado*, aunque tome mediciones no podré modificar el comportamiento del sistema.

Una vez que este punto está claro, vemos que podemos aplicar el método de linealización presentado haciendo:  $u = 0$ . Aplicando el método sistemático de la sección precedente, deberemos entonces obtener los puntos de equilibrio:

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 \\ x_1^* = \pm \sqrt{m \cdot g} \end{cases}$$

Cuántos puntos de equilibrio se tienen? En general un sistema de control no-lineal puede tener más de un punto de equilibrio.

Eligiendo como punto de linealización:  $x^* = [\sqrt{m \cdot g}, 0]'$ , el paso siguiente demanda el cálculo de:  $A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x^*}$ ,  $B = \frac{\partial f(x)}{\partial u} \Big|_{x^*}$ .

Las matrices de linealización  $\{A, B\}$  pueden verse en la Tabla 3.1, lo cual permite escribir el modelo linealizado en torno al punto de equilibrio elegido:

$$\dot{x} - \dot{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{g}{m}} & 0 \end{bmatrix} \cdot (x - x^*)$$

**3.2. Péndulo actuado.** Un caso sencillo de sistema de control con una sola entrada, es que constituye el péndulo simple con una entrada forzadora, como se muestra en la Figura 2, donde  $u(t)$  es un torque aplicado en el eje de giro.

En este caso las ecuaciones de movimiento son un poco más complicadas al aplicar las leyes de Newton. En particular, deberemos elegir un marco coordenado adecuado. Cuál es un marco coordenado apropiado? Porqué? Obtendremos las mismas ecuaciones?

Como veremos en el próximo tutorial de modelado de sistemas dinámicos, la elección del marco coordenado nos dará ecuaciones equivalentes (no las mismas sino equivalentes), es claro que habrá marcos coordenados que nos simplificarán mucho más los cálculos.

Por este motivo, elegimos un marco coordenado polar, con la variable de estado  $\theta(t)$  y aplicamos balance de torques:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \cdot \text{sen}(\theta) + u(t)$$

Como en ejemplo anterior, consideramos dos variables auxiliares:

$$\begin{cases} x_1 = \theta(t) \\ x_2 = \dot{\theta}(t) \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t) \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \cdot \text{sen}(x_1(t)) + u(t) \end{cases}$$

Como queda ahora el vector  $f(x, u)$ ? Veamos:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \cdot \text{sen}(x_1) + u \end{bmatrix}$$

Se posee entrada en este caso?. Procediendo con los pasos sistemáticos de la Sección 2, calculamos los equilibrios:

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_2^* = 0 \\ -\frac{g}{L} \cdot \text{sen}(x_1^*) + u^* = 0 \end{bmatrix}$$

Cuántos puntos de equilibrio se tienen en este caso? Como vemos depende del valor:  $u^*$ , es decir de cuánto torque existe una vez que el sistema ha llegado al equilibrio, de otra forma, nos dice cuánto torque necesitamos para mantener el sistema en equilibrio.

Pero entonces y desde un punto de vista de ingeniería, que valor es más conveniente para  $u^*$ ? Es claro que siempre es deseable que una vez que el sistema llega al equilibrio, no se tenga que *gastar energía* para mantenerlo allí, es decir que la mejor opción parece ser:  $u^* = 0$ .

Con esta elección, se tiene:

$$x_2^* = 0, \quad x_1^* = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Una vez elegido como punto de linealización el punto inferior de reposo del péndulo:

$$x_2^* = 0, \quad x_1^* = 0$$

TABLA 2. Matrices  $A$  y  $B$  del Ejemplo 2.

A	B
$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big _{x^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{g}{L}} & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{\partial f(x)}{\partial u} \Big _{x^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

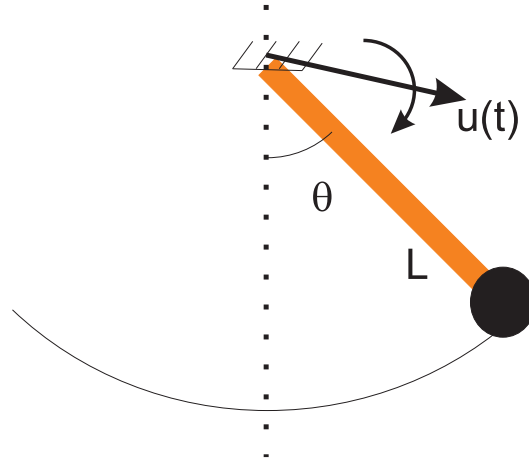


FIGURA 2. Péndulo actuado.

Como difieren en cuanto a la estabilidad los puntos de equilibrio:  $\{x_1^* = 0, x_2^* = 0\}$  y  $\{x_1^* = \pi, x_2^* = 0\}$ , justifique...

El siguiente paso requiere el cálculo de:  $A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x^*}$ ,  $B = \frac{\partial f(x)}{\partial u} \Big|_{x^*}$ . Estas matrices se muestran en la Tabla ??.

Escribiendo el sistema linealizado en variables de desviación:

$$\dot{x} - \dot{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{g}{m}} & 0 \end{bmatrix} \cdot (x - x^*) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (u(t) - u^*)$$

donde  $x^* = [0, 0]'$  y  $u^* = 0$ .

#### REFERENCIAS

1. Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba, *Vector calculus*, W. H. Freeman and Company, New York, 2003.

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y DE COMPUTADORAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR, BAHÍA BLANCA, ARGENTINA  
*E-mail address:* [agarcia@uns.edu.ar](mailto:agarcia@uns.edu.ar)