

Capítulo 5

Modelado e Identificación de Procesos

Para un efectivo análisis y diseño de sistemas de control, son esenciales tres elementos orgánicamente relacionados: las *entradas al proceso*, el *modelo del proceso* como una abstracción del proceso en sí mismo, y las *salidas* del proceso. Una vez que se conocen dos de ellos, puede obtenerse el tercero.

Por ejemplo, cuando la entrada es especificada en conjunto con el modelo y debe obtenerse la salida del sistema, este es el problema de *dinámica* o *análisis* del proceso que estudiamos en el Capítulo 4. Cuando se encuentran especificados el modelo y la salida del sistema y deseamos obtener la entrada al proceso, nos enfrentamos al problema de *control* de procesos que estudiaremos a partir del Capítulo 7. El obtener el modelo a partir de la información de las entradas y salidas (y el conocimiento eventual de las leyes fundamentales que gobiernan la operación del proceso) es el problema de *Modelado del Proceso*, este es quizás el problema más importante (y a menudo el más difícil) de los tres.

En este Capítulo nos avocaremos en un primer punto al desarrollo de modelos teóricos a partir de *primeros principios*, usando balances de materia y energía para determinar la estructura de las ecuaciones del modelo, y luego estimar los parámetros desconocidos a partir de los datos de entrada y salida. También trataremos el problema de la *Identificación del Proceso*: el enfoque alternativo de obtener un modelo puramente empírico partiendo de datos obtenidos del proceso.

5.1. Modelado Teórico del Proceso

En la literatura se encuentran textos completos sobre el modelado de sistemas, el objetivo de este capítulo no es presentar un tratamiento de modelado teórico. Más aún, siendo que el modelado matemático es reconocido como una curiosa conjunción de arte y ciencia, de lo subjetivo y lo objetivo, no es nuestra intención dar una receta rígida para la obtención de modelos, sino presentar los

principios y filosofía involucradas en el modelado de sistemas de procesos.

Partir de un sistema físico, y lograr resumir del mismo un modelo del proceso que puede ser utilizado como su reemplazo a los fines de análisis y diseño, es una tarea de varias etapas. Ellas pueden resumirse en la Fig. 5.1. Las leyes físicas que gobiernan el proceso son analizadas para producir las ecuaciones del modelo, que usualmente son complejas y no lineales. Este modelo es simplificado a una forma manejable, pero que debe retener los aspectos fundamentales del problema físico. En este punto la estructura de las ecuaciones del modelo es determinada. A continuación, aquellos parámetros que son completamente desconocidos (o conocidos no con suficiente precisión) son estimados usando datos del proceso tomados de experimentos dinámicos de entrada/salida sobre el proceso real. Como lo indicamos en la figura, en cada etapa del desarrollo del modelo se incorporan nuevos tipos de errores:

- *Errores de Formulación del Modelo:* Al postular el fenómeno físico y aplicar sus leyes, se realizan aproximaciones en las ecuaciones que introducen errores.
- *Errores de Simplificación del Modelo:* Al simplificar el modelo para hacerlo matemáticamente tratable, se realizan aproximaciones que introducen errores.
- *Errores de Medición Experimental:* Al recolectar los datos del proceso, ocurren errores sistemáticos de calibración en los instrumentos y errores experimentales aleatorios.
- *Errores en la Estimación de los parámetros:* Además de los efectos de los errores de las mediciones experimentales sobre los parámetros estimados, existen otras fuentes de errores en esta estimación. Por ejemplo, un diseño no adecuado de los experimentos puede producir conjuntos de datos que carezcan de la información intrínsecamente necesaria para obtener una estimación razonable de los parámetros. También puede resultar en una pobre estimación de los parámetros la elección de un algoritmo de estimación inapropiado.

Como un resultado de todos estos errores, el resultado final (un modelo teórico del proceso) será una representación imperfecta del proceso; este modelo provisorio debe ser confrontado contra los datos del proceso para determinar su eficacia en una etapa final de validación.

5.1.1. Formulación del Modelo

Existen varios factores que hacen muy importante el definir claramente el alcance del problema a resolver; ellos están listados a continuación

- Es imposible representar todos los aspectos físicos del proceso; solo espereamos capturar aquellos aspectos más relevantes para el problema en cuestión.

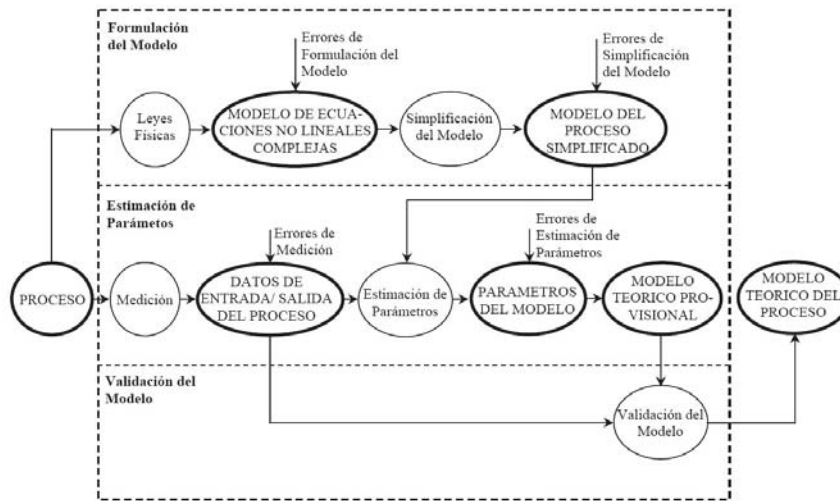


Fig. 5.1. Modelado teórico del Proceso.

- El comportamiento dinámico de un sistema puede representarse matemáticamente de varias formas, los diversos fenómenos representados varían en los grados de detalle: el resultado es que son posibles diferentes modelos para un dado proceso, todos ellos tratan de capturar los mismos aspectos del proceso, pero desde diversos ángulos, y con variado grado de complejidad.
- Un modelo del proceso es tan útil como las herramientas matemáticas disponibles para obtener soluciones a sus ecuaciones; algunas ecuaciones del modelo pueden resolverse analíticamente, mientras que otras solo pueden resolverse usando una computadora.

Para caracterizar un sistema y su desempeño, necesitamos

- Un conjunto de cantidades fundamentales dependientes cuyos valores describirán el estado natural de un sistema dado.
- Un conjunto de ecuaciones en las variables antes mencionadas que describirán como el estado natural del sistema cambia con el tiempo.

Para la mayor parte de los sistemas de procesamiento de interés en la industria de procesos, existen solo tres cantidades fundamentales: masa, energía y momento. En los casos en que las variables fundamentales no pueden ser medidas directamente, es común expresar estas cantidades en función de otras de fácil monitoreo como densidad, concentración, temperatura, caudal, presión, etc. Estas variables que permiten caracterizar el sistema son las denominadas *variables de estado* y sus valores describen el *estado del proceso*.

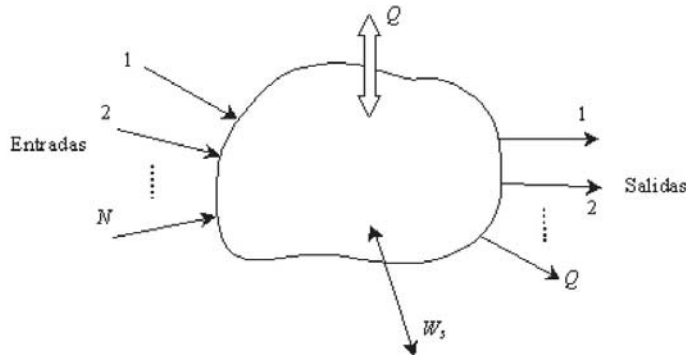


Fig. 5.2. Un sistema general y su interacción con el mundo real.

Las ecuaciones que relacionan las variables de estado (variables dependientes) de las independientes se deducen de la aplicación del *principio de conservación* de las *cantidades fundamentales*. El principio de conservación de una cantidad S establece que

$$\frac{\left[\begin{array}{c} \text{Acumulación} \\ \text{de } S \end{array} \right]}{\text{tiempo}} = \frac{\left[\begin{array}{c} \text{Entrada} \\ \text{de } S \end{array} \right]}{\text{tiempo}} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{Salida} \\ \text{de } S \end{array} \right]}{\text{tiempo}} + \frac{\left[\begin{array}{c} \text{Generación} \\ \text{de } S \end{array} \right]}{\text{tiempo}} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{Consumo} \\ \text{de } S \end{array} \right]}{\text{tiempo}} \quad (5.1)$$

La cantidad S puede ser una de las siguientes cantidades fundamentales: Masa total, masa de los componentes individuales, energía total y/o momento.

Consideremos a continuación el sistema de la Fig. 5.2. En él tenemos *Balance de masa total:*

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} \rho_i F_i - \sum_{j:\text{salidas}} \rho_j F_j \quad (5.2)$$

Balance de masa en el componente A:

$$\frac{d(n_A)}{dt} = \frac{d(c_A V)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} c_{A_i} F_i - \sum_{j:\text{salidas}} c_{A_j} F_j \pm rV \quad (5.3)$$

Balance total de energía:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(U + K + P)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} \rho_i F_i h_i - \sum_{j:\text{salidas}} \rho_j F_j h_j \pm Q \pm W_s \quad (5.4)$$

Las variables que aparecen en estas ecuaciones tienen los siguientes significados:

ρ	densidad del material del sistema
ρ_i	densidad del material en el caudal de entrada i -ésima
ρ_j	densidad del material en el caudal de salida j -ésima
V	volumen total del sistema
F_i	caudal volumétrico en la entrada i -ésima
F_j	caudal volumétrico en la salida j -ésima
n_A	número de moles del componente A en el sistema
c_A	concentración molar (moles/volumen) de A en el sistema
c_{A_i}	concentración molar de A en la entrada i -ésima
c_{A_j}	concentración molar de A en la salida j -ésima
r	relación de reacción por unidad volumétrica para el componente A en el sistema
h_i	Entalpía específica del material en el caudal de la entrada i -ésima
h_j	Entalpía específica del material en el caudal de la salida j -ésima
U, K, P	energías interna, cinética y potencial del sistema, respectivamente
Q	Cantidad de calor intercambiada entre el sistema y su entorno por unidad de tiempo
W_s	trabajo intercambiado entre el sistema y su entorno por unidad de tiempo

Por convención, una cantidad se considera positiva si ingresa al sistema y negativa si sale del mismo.

A continuación, para ejemplificar, desarrollaremos el modelo de una unidad de proceso típica

Ejemplo 5.1. Modelado de un tanque calentador.

Consideremos el tanque calefaccionado de la Fig. 5.3. Las cantidades fundamentales que proveen información sobre el estado del calentador son (a) la masa total del líquido en el tanque, (b) la energía total del material en el tanque y (c) su momento. El momento del calentador permanece constante aún cuando las perturbaciones varíen y no serán considerados en lo sucesivo.

Primeramente identificaremos las variables de estado para el tanque calefactor.

La masa total en el tanque:

$$\text{masa total} = \rho V = \rho Ah \quad (5.5)$$

donde ρ es la densidad del líquido, V es el volumen del líquido, A es la sección transversal del tanque, y h es la altura del nivel del líquido.

La energía del líquido en el tanque:

$$E = U + K + P$$

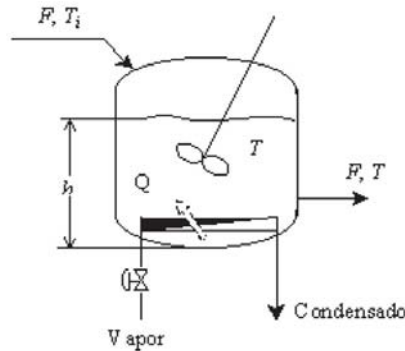


Fig. 5.3. Tanque calefactor agitado.

pero como el tanque no se mueve, $dK/dT = dP/dt = 0$ y $dE/dT = dU/dt$. Para sistemas líquidos,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dH}{dt}$$

donde H es la entalpía total del líquido en el tanque. Más aún,

$$H = \rho V c_p (T - T_{ref}) = \rho A h c_p (T - T_{ref}) \quad (5.6)$$

donde c_p es la capacidad calorífica del líquido en el tanque, y T_{ref} es la temperatura de referencia donde la entalpía específica del líquido se asume cero. De las ecuaciones (5.5) y (5.6) concluimos que las *variables de estado* para el tanque calentador son h y T , mientras que los parámetros constantes ρ , A , c_p y T_{ref} son las características del sistema tanque. Note que hemos asumido que la densidad ρ es independiente de la temperatura.

Ahora procederemos al desarrollo de las ecuaciones de estado. Para ello aplicaremos el principio de conservación a las dos cantidades fundamentales: la masa total y la energía total.

El balance total de masa:

$$\frac{\left[\begin{array}{c} \text{Acumulación de} \\ \text{masa total} \end{array} \right]}{\text{tiempo}} = \frac{\left[\begin{array}{c} \text{Entrada total} \\ \text{de masa} \end{array} \right]}{\text{tiempo}} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{Salida total} \\ \text{de masa} \end{array} \right]}{\text{tiempo}}$$

o

$$\frac{d(\rho A h)}{dt} = \rho F_i - \rho F \quad (5.7)$$

donde F_i y F son los caudales volumétricos (por ejemplo, medidos en m^3/min) para los flujos de entrada y salida, respectivamente. Asumiendo la densidad constante (independiente de la temperatura), la ecuación (5.7) se convierte en

$$A \frac{d(h)}{dt} = F_i - F \quad (5.8)$$

El balance total de energía:

$$\frac{\left[\begin{array}{c} \text{Acumulación de} \\ \text{energía total} \end{array} \right]}{\text{tiempo}} = \frac{\left[\begin{array}{c} \text{Entrada total} \\ \text{de energía} \end{array} \right]}{\text{tiempo}} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{Salida total} \\ \text{de energía} \end{array} \right]}{\text{tiempo}} + \frac{\left[\begin{array}{c} \text{energía suministrada} \\ \text{por el vapor} \end{array} \right]}{\text{tiempo}}$$

o

$$\frac{d[\rho Ahc_p(T - T_{ref})]}{dt} = \rho F_i c_p (T_i - T_{ref}) - \rho F c_p (T - T_{ref}) + Q \quad (5.9)$$

donde Q es la cantidad de calor suministrado por el vapor por unidad de tiempo. La ecuación anterior puede tomar una forma más simple (asumiendo $T_{ref} = 0$):

$$A \frac{d(hT)}{dt} = F_i T_i - FT + \frac{Q}{\rho c_p} \quad (5.10)$$

Manipulaciones algebraicas adicionales de esta ecuación conducen a

$$A \frac{d(hT)}{dt} = Ah \frac{d(T)}{dt} + AT \frac{d(h)}{dt} = Ah \frac{d(T)}{dt} + T(F_i - F) = F_i T_i - FT + \frac{Q}{\rho c_p}$$

o

$$Ah \frac{dT}{dt} = F_i (T_i - T) + \frac{Q}{\rho c_p} \quad (5.11)$$

Sumarizando lo anterior, tenemos las siguientes ecuaciones de estado que constituyen el modelo matemático del sistema,

$$\begin{aligned} A \frac{dh}{dt} &= F_i - F \\ Ah \frac{dT}{dt} &= F_i (T_i - T) + \frac{Q}{\rho c_p} \end{aligned} \quad (5.12)$$

El punto de trabajo de este proceso, está dado por las condiciones de estado estacionario, es decir

$$\begin{aligned} 0 &= F_i^s - F^s \\ 0 &= F_i^s (T_i^s - T^s) + \frac{Q^s}{\rho c_p} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Si consideramos que las variables manipuladas son F y Q , y que los estados son h y T . Entonces definiendo las variables desviación como $x_1 = h - h^s$, $x_2 = T - T^s$, $u_1 = F - F^s$ y $u_2 = Q - Q^s$, la primer ecuación del modelo puede obtenerse restando la ecuación dinámica menos la de estado estacionario:

$$A \left(\frac{dh}{dt} - \frac{dh^s}{dt} \right) = (F_i - F_i^s) - (F - F^s) \quad (5.14)$$

que en definitiva queda como

$$\dot{x}_1 = (F_i - F_i^s)/A - u_1/A \quad (5.15)$$

Similarmente, de la segunda ecuación de estado de (5.12) obtenemos

$$A \left. \frac{\partial(h\dot{T})}{\partial h} \right|_s (h - h^s) + A \left. \frac{\partial(h\dot{T})}{\partial \dot{T}} \right|_s (\dot{T} - \dot{T}^s) = -F_i^s(T - T^s) + \frac{Q - Q^s}{\rho c_p} \quad (5.16)$$

reagrupando

$$AT_i^s x_1 + Ah^s \dot{x}_2 = -F_i^s x_2 + \frac{u_2}{\rho c_p} \quad (5.17)$$

siendo que $\dot{T}^s = 0$, esto da

$$Ah^s \dot{x}_2 = -F_i^s x_2 + \frac{u_2}{\rho c_p} \quad (5.18)$$

En adición a las ecuaciones de balance, necesitaremos otras relaciones para expresar equilibrios termodinámicos, relaciones de reacción, relaciones de transporte para calor, masa, momento, etc. Estas relaciones adicionales, que son necesarias para completar el modelo matemático de muchos procesos físicos/químicos, pueden ser clasificados como

- *Ecuaciones de relación de transporte:* Se necesitan para describir las relaciones de transferencia de masa, energía y momento entre un sistema y su entorno. Por ejemplo, la cantidad de calor Q suministrada por el vapor al líquido del tanque del ejemplo anterior es dada por la ecuación de relación de transferencia de calor $Q = UA_t(T_{st} - T)$ donde U es el coeficiente de transferencia de calor, A_t es el área total de transferencia de calor y T_{st} es la temperatura de vapor.
- *Ecuaciones de relación cinética:* Ellas son necesarias para describir las relaciones de las reacciones químicas que toman lugar en el sistema. Por ejemplo, una reacción de primer orden tiene una relación de reacción dada por $r = k_0 e^{-E/RT} c_A$ donde k_0 es la constante cinética pre-exponencial, E es la energía de activación para la reacción, R es la constante ideal de los gases, T es la temperatura del fluido reactante y c_A es su concentración.
- *Relaciones de reacción y equilibrio de fase:* Ellas son necesarias para describir las situaciones de equilibrio alcanzadas durante una reacción química o por dos o más fases.
- *Ecuaciones de estado:* Son necesarias para describir las relaciones entre las variables dependientes describiendo el estado termodinámico de un sistema. La ley del gas ideal y la ecuación de Van Der Waals son dos ecuaciones típicas de estado para sistemas gaseosos.

5.1.2. Estimación de Parámetros en Modelos Teóricos

Como lo mencionamos anteriormente, un modelo teórico consiste en un conjunto de ecuaciones en variables de estado. Estas ecuaciones también contienen *parámetros*: constantes de relación de reacción, energías de activación, coeficientes de transferencia de calor, conductividades térmicas, densidades, etc., las cuales a menudo son desconocidas.

El modelo solo puede ser un reemplazo válido de un proceso real cuando podemos, partiendo de su información y de los datos de entrada, generar predicciones para los estados y las variables de salida. Esto es solamente posible si los valores específicos de los parámetros desconocidos han sido determinados para el proceso en cuestión. Es importante resaltar que un modelo puede ser una representación exacta del proceso en forma; pero sin los valores exactos de los parámetros, la predicción no será exacta.

Existen tres caminos para determinar los parámetros desconocidos en el modelo de un proceso,

1. Extraer los parámetros necesarios de la literatura publicada (por ejemplo, propiedades físicas como densidades, capacidades caloríficas, conductividades térmicas, etc., están disponibles en la literatura).
2. Llevando a cabo experimentos independientes para determinar los parámetros fundamentales del modelo (por ejemplo, mediante experimentos de laboratorio).
3. Realizando experimentos sobre el sistema físico particular de interés y determinando los valores de los parámetros desconocidos para producir predicciones que estén lo más cerca de los datos experimentales observados.

Entonces, cuando requerimos parámetros no disponibles en la literatura, a única alternativa es estimarlos a partir de datos experimentales.

Para propósitos de estimación de parámetros, los modelos teóricos para un proceso pueden ser representados de la siguiente forma

$$\eta = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \theta) \quad (5.19)$$

donde η es un vector n -dimensional de las salidas actuales del proceso que puedan ser medidas en un experimento, \mathbf{z} es un vector m -dimensional de variables “independientes” que pueden ser especificadas arbitrariamente para cada experimento, θ es un vector p -dimensional de parámetros desconocidos y \mathbf{f} es alguna relación funcional, entre estas variables, que pueden ser relaciones explícitas funcionales como modelos algebraicos, o soluciones analíticas explícitas de un modelo de ecuaciones diferenciales, pero la forma de \mathbf{f} es conocida.

En este contexto, el objetivo de la estimación de parámetros está relacionado con la *determinación* a partir de datos experimentales del mejor conjunto de valores de los parámetros desconocidos θ en un modelo del proceso de forma conocida. Conceptualmente esto involucra el ajustar la solución del modelo del proceso a los datos obtenidos experimentalmente, para varios valores de los

parámetros desconocidos; el conjunto de valores de los parámetros para el cual la predicción del modelo se acerque más a los datos experimentales es elegido como el “mejor” conjunto de parámetros estimados.

El problema de estimación de parámetros se dice lineal o no lineal referido al vector de parámetros y no referido al vector de variables de estado. Si la función \mathbf{f} es lineal con respecto al vector θ , entonces el modelo se dice ser lineal en los parámetros, y conduce a un problema de estimación lineal de parámetros. Cuando los parámetros entran en el modelo en forma no lineal, tenemos un problema de estimación no lineal de parámetros. Esta clasificación es una potencial fuente de error, pues un modelo puede ser lineal en términos de las variables del proceso y ser no lineal respecto de los parámetros.

Cada experimento simple para estimación de parámetros, envuelve medir las n variables de salida $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, para un conjunto especificado de valores para variables independientes z_1, z_2, \dots, z_m . Para estar habilitados para determinar p parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ es necesario realizar al menos p experimentos independientes. Como es fácil de suponer, cuanto mayor sea el número de experimentos, mejor será la estimación realizada.

El resultado de cada experimento individual es un conjunto de vectores η y \mathbf{z} que pueden ser relacionados por el modelo del proceso. En particular, para el experimento k -ésimo, tenemos

$$\eta(k) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(k), \theta); k = 1, 2, \dots, N \quad (5.20)$$

si N es el número de experimentos independientes desarrollados ($N \geq p$).

Debemos notar que las mediciones experimentales de $\eta(k)$ no igualarán exactamente su valor real a causa del error de medición. Por este motivo, diferenciaremos la salida actual del proceso ($\eta(k)$) de su medida obtenida experimentalmente, notado como $\mathbf{y}(k)$. Notaremos esto explícitamente como,

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(k), \theta) + \epsilon(k); k = 1, 2, \dots, N \quad (5.21)$$

donde $\epsilon(k)$ representa el error entre la predicción del modelo y los datos reales.

Entonces, la estimación de parámetros se centra ahora en hallar un conjunto específico de valores de los parámetros $\hat{\theta}$ tal que se minimice una función escalar positiva del error $S(\theta)$. Obviamente la estimación dependerá del criterio de error que determine la función objetivo. El criterio más utilizado es el medio cuadrático, definido como

$$S(\theta) = \sum_{k=1}^N [\epsilon(k)]^T [\epsilon(k)] = \sum_{k=1}^N [\mathbf{y}(k) - \mathbf{f}(\mathbf{z}(k), \theta)]^T [\mathbf{y}(k) - \mathbf{f}(\mathbf{z}(k), \theta)], \quad (5.22)$$

donde la sumatoria se realiza sobre todos los datos experimentales. Desde este punto de vista, el problema de estimación de parámetros es un problema de optimización.

5.1.3. Validación de un Modelo Teórico

Luego de que se ha formulado teóricamente, y se han estimado los parámetros, es importante verificar que el modelo provee una representación adecuada

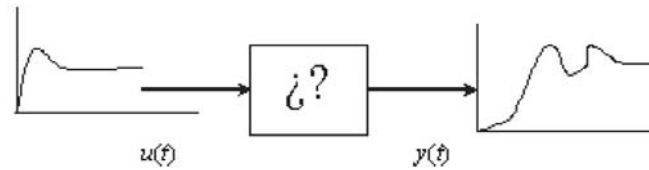


Fig. 5.4. Identificación del Proceso.

del proceso físico.

Aún cuando existen varias técnicas para analizar la exactitud de un modelo (muchas de ellas con firmes bases en estadística), la técnica más satisfactoria involucra graficar la predicción del modelo teórico superpuesta con los datos experimentales. De esta forma, podemos a simple vista tener una impresión de cuán bueno es el modelo.

5.2. Modelado Empírico: Identificación del Proceso

En muchas situaciones prácticas, es importante el tratar el proceso dinámico como una “caja negra” para obtener una descripción matemática razonable. En estos casos, las características más importantes del sistema se “identifican” completamente a partir de su respuesta a funciones de entrada conocidas. Este enfoque del modelado se denomina *Identificación del Proceso* y resulta en modelos empíricos. Estas técnicas se utilizan fundamentalmente en aquellos casos donde los principios fundamentales del proceso no son claramente entendidos, o en aquellos donde el modelado riguroso llevaría a modelos demasiados complicados para los objetivos de control.

Consideremos la situación descrita en la Fig. 5.4, en la cual el proceso “desconocido” es sometido a una función forzante $u(t)$ y se mide la respuesta $y(t)$. Aún cuando no se conozcan los principios que producen el desempeño estímulo/respuesta observado, es posible desarrollar un modelo para este sistema correlacionando directamente los datos de entrada y salida: La identificación envuelve construir un modelo del proceso, estrictamente a partir de datos entrada/salida obtenidos experimentalmente, sin recurrir a ninguna ley relativa a las naturaleza y propiedades del sistema. No es necesario ningún conocimiento a priori del proceso: el sistema se trata como una “caja negra.”

En general al identificar un sistema continuo, se puede asumir que el sistema se comportará como un sistema lineal, sin embargo, también es posible obtener un modelo no lineal. En lo referido a la práctica del control de procesos, asumiremos que el proceso a controlar se comporta (en las cercanías del punto de trabajo) como un sistema lineal, de forma tal que el uso de modelos lineales conducirán a resultados de calidad aceptable.

Siendo que el proceso de identificación requiere datos experimentales, puede

en primer instancia llevarse a cabo mediante la operación normal del proceso. Sin embargo, es práctica usual suspender la operación “normal” del proceso y realizar experimentos especialmente diseñados para el desarrollo de modelos empíricos. En el caso de proceder con datos obtenidos en operación normal se dice que la identificación se realiza “en línea,” en caso contrario se dice que se realiza “fuera de línea.” En esta sección nos abocaremos a la identificación fuera de línea por ser la más usualmente encontrada en la práctica.

Por otro lado, si bien los datos experimentales se obtienen en instantes discretos de tiempo, pueden ser utilizados para obtener modelos tanto discretos como continuos.

En la Tabla 5.1. se detallan algunos aspectos importantes para entender la diferencia entre el modelado teórico y la identificación experimental.

Tabla 5.1 Comparación entre Modelado e Identificación

Modelado Teórico	Identificación
Involucra pocas mediciones, solo para la estimación de parámetros desconocidos.	Requiere muchos datos, pues el modelo completo se basa en estos datos.
Provee información acerca del estado interno del sistema.	Provee solo información de los datos utilizados para excitar el proceso y de las salidas en las cuales se tomaron las mediciones.
Promueven un entendimiento fundamental de la operación interna del proceso.	Trata al proceso como una caja negra.
Requiere un conocimiento del proceso completo y medianamente exacto.	No requiere un conocimiento detallado, solo los datos de salida que son obtenibles en respuesta a cambios en la entrada.
No es particularmente útil para procesos complejos o pobremente conocidos.	Muy a menudo prueba ser la única alternativa para modelar el desempeño de procesos pobremente entendidos y/o complejos
Conducen naturalmente a modelos lineales y no lineales.	Requieren métodos especiales para conducir a modelos no lineales.

5.2.1. Principios del Modelado Empírico

Los principios básicos detrás del desarrollo de modelos empíricos por identificación de procesos pueden deducirse a partir de la representación esquemática mostrada en la Fig. 5.4. En este contexto, el proceso de identificación se puede definir como: Dada la entrada a un proceso dinámico, $u(t)$, y la respuesta del proceso ante esta entrada, $y(t)$, ¿Cuál es el modelo de la función transferencia del proceso $g(\cdot)$?

Observe que este es el problema inverso al de análisis de la dinámica, que es descrito como: dada $g(\cdot)$ y $u(t)$, obtener $y(t)$. Obviamente, este problema de análisis es más directo que el de identificación.

El primer paso en la identificación es la determinación del modelo a usar, el cual deberá ser el más simple posible, tal que su estructura permita “explicar” el comportamiento de los datos entrada/salida. Esta etapa lleva varias decisiones que la persona encargada del modelado debe hacer: ¿Qué tipo de modelo usar?; ¿Debe ser lineal o no lineal?; ¿Qué cantidad de parámetros va a tener?; etc. Las respuestas a estas preguntas definen el conjunto dentro del cual se buscará una representación apropiada del sistema a identificar. Un conjunto típico es el de las funciones de transferencia de primer o segundo orden con retardo de tiempo. La selección de la estructura es la etapa más difícil de un procedimiento de identificación porque algunos de los aspectos que involucra requieren de decisiones independientes del conjunto de datos. Decisiones que deben basarse en intuición, experiencia y conocimiento previo del sistema a identificar. En este punto es importante el análisis y conocimiento de la dinámica del proceso, por ejemplo realizando una excitación tipo escalón, podemos determinar si el proceso responde como un sistema de primer más retardo, o serán necesarios modelos más complejos. En este punto en general se prefieren los modelos más simples que pueden representar adecuadamente los datos entrada- salida. Los modelos más utilizados son los de primer o segundo orden más retardo. Más aún, en algunas aplicaciones, como por ejemplo para el ajuste de controladores (como veremos en el próximo capítulo) necesitaremos que el modelo sea del tipo primer orden más retardo, por lo que solo nos preocupa ajustar los parámetros de este modelo que “mejor” aproxime a los datos provenientes del proceso.

Otro punto a tener en cuenta son los datos del proceso. Si consideramos que estos datos proveen la única base para el desarrollo de un modelo para un proceso determinado, debemos tener en cuenta que la información no contenida en los datos, no puede aparecer en el modelo en forma “mágica.” Por este motivo es importante el *diseño del experimento*, esto es: elegir que señales medir, cada cuanto tiempo medirlas (es decir el periodo de muestreo), que señales manipular y como manipularlas. La manipulación hace referencia al tipo de señal de prueba que se adicionara a la entrada del sistema.

Respecto a la elección de las variables de entrada, es un aspecto fundamental de la identificación. Note que la información que se obtiene de los datos de salida, dependerá fundamentalmente de los datos de entrada. Es por ello sumamente importante la elección de entradas que produzcan salidas con información suficientemente rica. Es también importante que la información importante sea

fácil de extraer. Algunas funciones típicamente utilizadas son escalón, impulsos, pulsos, senoides, ruido blanco y secuencias binarias pseudo aleatorias.

También es importante el coleccionar tantos datos como sea necesario para “identificar” todos los aspectos del proceso que consideremos importantes (dentro del rango de operación del proceso). Para ejemplificar este punto, consideremos el caso en que deseamos identificar la ganancia de estado estacionario, para ello necesitamos coleccionar datos hasta que el proceso se establezca en el nuevo estado estacionario; si detenemos la adquisición de datos antes que se alcance el estacionario, será muy dificultoso realizar la identificación con exactitud. Los datos constituyen el elemento clave de un procedimiento de identificación. Estos pueden ser obtenidos de dos formas: a) A partir de experimentos específicamente diseñados para extraer la mayor cantidad de información acerca de las características dinámicas del proceso, o b) Obtenerlos a partir de registros provenientes de la operación normal del proceso. Esta es la opción a seguir cuando la experimentación con el sistema a identificar es demasiado costosa. Con la segunda forma los datos obtenidos serán menos informativos que con la primera ya que no podemos asegurar que se exite el sistema con la amplitud necesaria.

Una vez que el modelo candidato sea postulado, deberemos ajustar los parámetros de este modelo para aproximar los datos experimentales. En general, esta es la tarea más importante del proceso de identificación. Para este punto es importante definir un índice de desempeño. Este es el criterio con el cual se cuantifica que tan apropiado es un modelo. Algunos índices solo evalúan la capacidad predictiva del modelo, comparando la salida medida con la predicha. Otros índices además de la capacidad predictiva, evalúan la complejidad del modelo. El primer tipo de índice es adecuado cuando todos los miembros de la familia de modelos tienen el mismo número de parámetros. El segundo tipo de índice se utiliza para comparar modelos con diferente estructura.

Una vez que se tienen los datos de entrada/salida y la estructura que tendrá el modelo, el paso siguiente es encontrar, de acuerdo con el índice de desempeño elegido, el “mejor” modelo con el cual representar el sistema que se está identificando. Un método para esto lo analizaremos en la siguiente subsección.

Como último paso del proceso de identificación (como el caso de modelado teórico) es la validación del modelo. Esto se realiza generalmente comparando las predicciones de los modelos con los datos experimentales, y evaluando las diferencias.

El conjunto de los pasos involucrados en el proceso de identificación se resume en la Fig. 5.5. En las secciones siguientes veremos algunas estrategias usadas en modelar empíricamente modelos.

5.2.2. Método de la variable instrumental

Este es uno de los métodos de ajuste de parámetros del controlador más usados. Supongamos que queremos identificar un sistema usando mediciones de

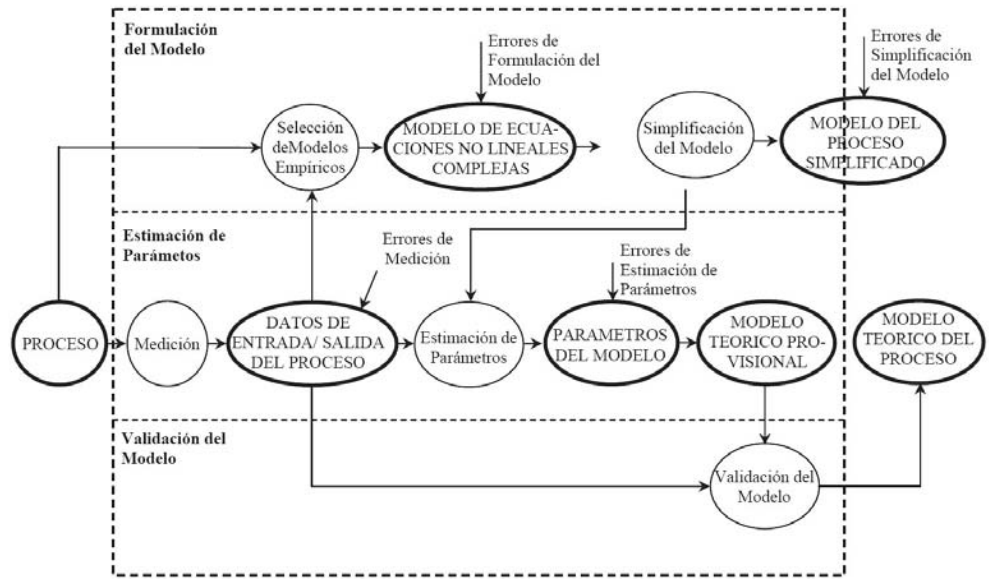


Fig. 5.5. Identificación Empírica del Proceso.

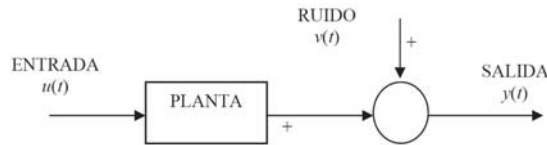


Fig.5.2.2. Esquema de toma de datos.

$u(t)$ e $y(t)$ (ver Figura 5.6) y el siguiente modelo

$$\hat{y}(t|\theta) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) - a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) + v(t) \quad (5.23)$$

donde $v(t)$ es un ruido de medición (considerado una variable estocástica aleatoria) y la notación $\hat{y}(t|\theta)$ indica el valor de $y(t)$ estimado por el modelo con parámetros θ . En este contexto identificar este sistema significa encontrar los parámetros θ que en este caso son $b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Este modelo se puede escribir como una regresión lineal como

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t)\theta + v(t), \quad (5.24)$$

donde $\theta = [b_0 b_1 \dots b_n a_1 \dots a_n]^T$ es el vector de parámetros y $\varphi(t) = [u(t) u(t-1) \dots u(t-n) - y(t-1) \dots - y(t-n)]^T$ es el vector de regresión o regresor.

Lo que queremos es estimar el vector de parámetros θ_N . Dados N pares de mediciones $(y(1)\varphi(1)), \dots, (y(N)\varphi(N))$, deducimos un conjunto de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} y(1) &= \varphi^T(1)\theta \\ y(2) &= \varphi^T(2)\theta \\ &\vdots \\ y(N) &= \varphi^T(N)\theta \end{aligned} \quad (5.25)$$

que pueden ser escritas en forma matricial como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Psi}\theta \quad (5.26)$$

donde $\mathbf{y} = [y(1)y(2)\dots y(N)]^T$ y $\mathbf{\Psi} = [\varphi^T(1)\varphi^T(2)\dots\varphi^T(N)]$.

El error de modelización o residuo se define entonces como

$$\epsilon = \mathbf{y} - \mathbf{\Psi}\theta \quad (5.27)$$

donde $\epsilon = [\epsilon(1)\epsilon(2)\dots\epsilon(N)]^T$ es el vector de error y los $\epsilon(1), \epsilon(2), \dots, \epsilon(N)$ son los errores de cada medición.

El objetivo de la identificación es el de encontrar los valores de $\epsilon(t)$ lo más chicos posibles.

La norma del vector ϵ es

$$\|\epsilon\| = \sqrt{\epsilon(1)^2 + \epsilon(2)^2 + \dots + \epsilon(N)^2} \quad (5.28)$$

Para encontrar el conjunto de parámetros estimados podemos resolver un problema de mínimos cuadrados, este consiste en minimizar $\|\epsilon\|^2$, que es equivalente a minimizar

$$V_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(t)^2 \quad (5.29)$$

Para realizar esta minimización hay que calcular el gradiente de V_N respecto de los parámetros e igualar a cero. Esto da como resultado la siguiente solución matricial

$$\theta_N = (\mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi})^{-1}\mathbf{\Psi}^T\mathbf{y} \quad (5.30)$$

Usando el producto de sumas finitas, la solución se encuentra de la siguiente manera

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial \theta} = \frac{-2}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) [y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 = 0 \quad (5.32)$$

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right] \theta_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \quad (5.33)$$

$$\theta_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \quad (5.34)$$

Usando la siguiente notación

$$\theta_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t) y(t) \quad (5.35)$$

donde $\zeta(t)$ se denomina *Vector de variable Instrumental*, cuyos elementos se llaman *instrumentos*.

El método de mínimos cuadrados se obtiene haciendo $\zeta(t) = \varphi(t)$.

Suponiendo que el verdadero sistema es

$$y(t|\theta) = \varphi^T(t) \theta_0 + v(t), \quad (5.36)$$

Es decir, suponiendo que el sistema original satisface el mismo modelo con un parámetro θ_0 y un error de medición $v(t)$, entonces,

$$\theta_N = \theta_0 + \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) v(t) \quad (5.37)$$

Si la cantidad de medidas es extremadamente grande es de esperar que el promedio iguale a la esperanza matemática, es decir

$$E(\varphi(t) \varphi^T(t)) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \quad (5.38)$$

y

$$E(\varphi(t) v(t)) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) v(t) \quad (5.39)$$

Entonces, si el número de medidas es elevado,

$$\theta_N = \theta_0 + [E(\varphi(t) \varphi^T(t))]^{-1} E(\varphi(t) v(t)) \quad (5.40)$$

Bajo estas condiciones, esto es, si la cantidad de medidas es extremadamente grande es de esperar que los parámetros estimados se acerquen a los valores reales, es decir

Si $N \rightarrow \infty$ entonces $\theta_N \rightarrow \theta_0 + [E(\varphi(t) \varphi^T(t))]^{-1} E(\varphi(t) v(t))$.

Para que la estimación sea exacta se deben cumplir dos requerimientos,

1. El término $[E(\varphi(t) \varphi^T(t))]$ debe ser invertible, y
2. el término $E(\varphi(t) v(t))$ debe ser cero cuando N tiende a infinito.

5.2.3. Identificación Basada en Respuesta al Escalón

La principal estrategia de identificación a la respuesta al escalón es el ajustar funciones *teóricas* de respuesta al escalón a datos experimentales de la respuesta del proceso a este tipo de entradas. La respuesta experimental se obtiene implementando un cambio al escalón en la variable de entrada del proceso físico y grabando los cambios observados en la variable de salida. El procedimiento experimental de introducir una entrada escalón para el solo propósito de obtener un modelo empírico se denomina *test escalón*.

La *formulación del modelo* consiste en inspeccionar los datos de la respuesta al escalón y proponer potenciales modelos candidatos y en obtener, para estos modelos, la respuesta teórica al escalón.

La *estimación de parámetros* consiste en obtener los valores de los parámetros desconocidos del modelo que proven el mejor ajuste a los datos. El modelo potencial más utilizado es un sistema de primer orden más retardo de la forma

$$g(s) = \frac{K e^{-s\alpha}}{1 + \tau s} \quad (5.41)$$

cuyos parámetros son K , τ y α . La respuesta a un escalón de amplitud A aplicado en el tiempo $t = 0$ a este modelo es

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < \alpha \\ AK (1 - e^{-(t-\alpha)/\tau}), & t \geq \alpha \end{cases} \quad (5.42)$$

La *validación del modelo* involucra graficar la respuesta al escalón teórica de cada modelo identificado y la evaluación de su ajuste a los datos experimentales.

Las mayores ventajas de la identificación basada en respuesta al escalón

1. Las respuestas al escalón teóricas son fácil de derivar para los candidatos a modelos típicos.
2. En la práctica, las respuestas experimentales al escalón son fácil de obtener.

Las principales desventajas son,

1. Proponer el modelo candidato “correcto” mediante una inspección de una respuesta al escalón es complicado, pues varios sistemas fundamentalmente diferentes suelen tener respuestas al escalón cuantitativamente similares.
2. Los test tipo escalón involucran perturbar el proceso (usualmente no lineal) desde un punto estacionario a otro. Esto en general producirá datos que contienen información de la no linealidad que no puede ser modelada por modelos lineales. Cuanto mayor sea la amplitud del escalón, mayor será el efecto de esta no linealidad no modelada.