Capítulo 4

Modelos y Dinámica de Procesos

4.1. Introducción

Como definimos en el capítulo anterior, las variables de entrada de un proceso son aquellas capaces de estimularlo independientemente y de inducir cambios en sus condiciones internas. Tales cambios en los estados internos del proceso son usualmente aparentes a partir de cambios observados en las variables de salida.

Pero ¿cuánto? y ¿de qué forma? el proceso responde a cambios en la variable de entrada claramente depende de la *naturaleza* del cambio en la entrada; y también depende de la naturaleza intrínseca del propio proceso. Para un cambio dado en la entrada, la respuesta observada en el proceso provee información de la naturaleza del proceso en cuestión. Por lo mismo, si se conoce la naturaleza intrínseca del proceso, y podemos caracterizarla adecuadamente, entonces podemos predecir la salida del proceso ante cualquier entrada. La *dinámica del proceso* se relaciona con analizar el comportamiento dinámico (es decir, variante con el tiempo) en respuesta a varios tipos de entradas.

4.2. Herramientas del Análisis de la Dinámica

4.2.1. El Modelo del Proceso y Funciones Forzantes Ideales

El objetivo primordial del análisis dinámico es el investigar y caracterizar el comportamiento de sistemas cuando un proceso es sujeto a varios tipos de cambios en la entrada. Para estar seguros, estas investigaciones pueden llevarse a cabo en las propias unidades de procesamiento físicas: cambiando las entradas, y almacenando las correspondientes respuestas de las variables de salida para un análisis posterior. Sin embargo, este enfoque sufre de dos problemas que son obvios:

1. *El proceso físico puede no existir aún.* Esta situación surge cuando el análisis y el diseño del sistema de control se realizan antes de la construcción de la planta.

2. *Es demandante de tiempo y caro.* Los procesos reales tienen grandes capacidades que una vez perturbadas demandan una gran cantidad de tiempo para ser "estacionadas" nuevamente. Llevar a cabo varios de estos experientos resultará en un gran tiempo de análisis. Más aún, la operación regular de un proceso debe ser suspendida mientras se realizan las experiencias; resultando en importantes pérdidas económicas.

En adición a esto existe una contrariedad adicional no obvia: cierta información teórica crítica, útil en caracterizar el comportamiento de clases enteras de procesos, no son fácilmente disponibles de los resultados de experimentos llevados a cabo de un proceso específico.

Por estos motivos, el análisis dinámico del comportamiento de un proceso es llevado a cabo mediante la ayuda de una *representación matemática* del proceso. Tales análisis teóricos, por supuesto, solo proven conocimiento acerca del comportameniento idealizado del proceso, pero han probado ser muy útiles en el entendimiento, y en la caracterización del comportamiento real.

La esencia del análisis dinámico puede entonces ser puesta como: *dada alguna representación matemática de un proceso, investigar la respuesta del proceso ante varios cambios en la entrada. Esto es, dado un* **modelo del proceso***, hallar $y(t)$ en respuesta a entradas $u(t)$ y $d(t)$.*

Observe entonces que todo análisis exitoso requiere

1. Un modelo del proceso, y

2. Funciones de entradas bién caracterizadas.

En suma a estos requerimientos, sin embargo, notemos la tarea de obtener una respuesta del proceso involucra resolver las ecuaciones matemáticas que surgen de incluir las entradas forzantes en las ecuaciones del modelo. Esta es la tarea central del análisis dinámico del proceso. Como es de esperar, el resultado excitoso de esta tarea requiere de ciertas herramientas matemáticas.

4.2.2. Herramientas Matemáticas

Como veremos posteriormente, los modelos de los procesos están usualmente en la forma de *ecuaciones diferenciales*: lineales o no lineales, ordinarias o parciales. Pese a esto, una de las herramientas más importantes es la *Transformada de Laplace*, una técnica que, entre otras cosas convierte ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en ecuaciones algebraicas más fáciles de manejar. Un resultado de esto es que permite el uso de funciones transferencia que son de gran importancia en el análisis de la dinámica de procesos.

En la próximas secciones incluiremos un análisis detallado de los tipos de modelos matemáticos para procesos.

4.3. La Descripción Matemática de un Proceso

Como digimos anteriormente, el diseño efectivo de controladores es significativamente facilitado por el entendimiento de la dinámica del proceso. Este entendimiento depende de la disponibilidad de un modelo matemático del proceso. Podemos decir que el primer paso para el análisis y/o diseño de un sistema de control en la obtención de un modelo matemático apropiado.

El *modelo matemático* es en principio, una colección de relaciones matemáticas entre variables del proceso con el propósico de describir el comportamiento del sistema físico. El uso principal del modelo es entonces "reemplazar" al proceso haciendo posible investigar sus respuestas bajo varias condiciones de entrada en forma rápida y económica sin necesidad de perturbar la entidad física. Sin embargo, debemos distinguir entre el *proceso* físico (usualmente complejo) y el *modelo* matemático que lo describe. El modelo describe solo las tendencias fundamentales del proceso, pero nunca lo copiará totalmente. En lo que sigue el término *sistema* será usado para describir tanto al proceso real como a su modelo, dependiendo del contexto.

4.3.1. Características del Procesos y sus Modelos

A continuación discutiremos la terminología usada para caracterizar procesos sobre la base de sus características inherentes, y los tipos de representaciones matemáticas que lo describen mejor. Previo a esto es importante notar que cuando usamos los términos variable *dependiente* o *independiente* debemos entenderlos en el siguiente contexto: todas las *variables del proceso* que se identificaron en el Capítulo 3: sean estados, salidas, entradas o perturbaciones *dependen* del tiempo y/o de su ubicación espacial; entonces ellas deben ser consideradas como dependientes. En este caso, el tiempo y las coordenadas espaciales son las *variables independientes*.

Sistemas Lineales y no Lineales

Un sistema descripto por ecuaciones lineales se dice lineal. El sistema que no es lineal se denomina "no lineal." Por ahora, debemos notar que la mayor parte de los procesos exhiben un comportamiento nolineal. Pese a esto, en muchos casos este comportamiento no lineal puede aproximarse en forma efectiva por un conjunto de ecuaciones lineales.

Sistemas de Parámetros Concentrados y Distribuidos

Existen procesos (lineales o no) en que las variables dependientes (es decir todas las variables del proceso) pueden ser consideradas (para todos los propósitos) como *uniformes* dentro del sistema completo, variando solo con el tiempo. Como veremos en breve estos sistemas pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias, con el tiempo como la única variable independiente. Estos procesos se denominan sistemas a *parámetros concentrados* pues, en cierto sentido, la dependencia de todas las variaciones observadas han sido concentradas en una única variable indenpendiente.

Cuando las variables de un proceso varian dentro del sistema punto a punto además de variar con el tiempo, la descripción fundamental matemática debe tomar la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para que la variación adicional con la posición pueda describirse adecuadamente. Tales procesos se denominan sistemas a *parámetros distribuidos*. Ellos tienen más variables independiente, y las variaciones del proceso deben ser evaluadas en todas ellas.

Sistemas Contínuos y Discretos en el Tiempo

Aún cuando la asunción tácita es de que las variables de un proceso no cambian ordinariamente "a saltos," es decir que ellas normalmente se comportan como funciones *continuas* suaves dependientes del tiempo (y/o posición); existen situaciones en que las variables de salida son deliberadamente muestreadas solamente en puntos discretos del tiempo. Las variables del proceso aparecen de esta forma como cambiantes en forma constante a tramos con respecto a lo que ahora es el tiempo discretizado. Estos procesos son modelados por *ecuaciones a diferencias* y se denominan *sistemas discretos en el tiempo*.

4.3.2. Varias Formas de Modelos de Procesos

Como lo notamos antes, el modelo del proceso es una colección de relaciones matemáticas entre las variables definidas en el Capítulo 3. Los modelos matemáticos en los cuales las variables de estado se representan explicitamente junto a las entradas y salidas se denominal *modelos en variables de estado*. Como demostraremos proximamente, cuando estos modelos se formulan a partir de principios fundamentales, toman la forma de ecuaciones en el dominio tiempo.

Los modelos matemáticos que, en el otro extremo, relacionan solo variables de entrada y salida (excluyendo totalmente a los estados) se denominan *modelos entrada/salida*. Estos modelos pueden ser representados tanto en el dominio tiempo como en el *dominio transformado*, en particular nos interesa su formulación en el dominio de Laplace. En general estos modelos surgen de transformaciones del modelo en variables de estado, pero pueden ser obtenidos directamente de datos experimentales.

Es usual el escribir un modelo de un proceso particular de alguna de las siguiente formas[1]

1. Espacios de Estados (Ecuaciones diferenciales o a diferencias),
2. El dominio transformado de Laplace,
3. La forma respuesta al impulso o convolución.

En las próximas secciones introduciremos las formas que toman cada uno de estos modelos asi como las relaciones entre ellos.

[1]Exiten otras, pero para los fines de este curso estas nos serán suficientes

4.4. Modelos en Espacio de Estados

Para procesos continuos en el tiempo, los modelos en ecuaciones diferenciales que relacionan las variables estado con las variables entradas y salidas se denominan modelos en espacio de estados.

Para sistemas de varias entradas y varias salidas a parámetros concentrados no lineales, el modelo en espacio de estados tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\mathbf{f}(.)$ y $\mathbf{h}(.)$ son vectores de funciones no lineales, $\mathbf{x} \in \Re^n$ es el vector de variables de estado, $\mathbf{u} \in \Re^m$ es el vector de variables manipuladas, $\mathbf{d} \in \Re^v$ es el vector de perturbaciones y $\mathbf{y} \in \Re^l$ es el vector de variables de salida. Para sistemas de una entrada y una salida, los vectores $\mathbf{f}(.)$ y $\mathbf{h}(.)$ se reemplazan directamente por funciones simples. Es importante destacar que además de las ecuaciones anteriores, para describir completamente este modelo es necesario definir las condiciones iniciales (por ejemplo, los valores de todas las señales para el tiempo cero). Es práctica usual definir estas condiciones en un punto de trabajo en estado estacionario como lo definiremos proximamente.

En el caso de sistemas lineales estas funciones toman la forma matricial

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \Gamma\mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde A, B, C y Γ son matrices de sistema de dimensiones apropiadas. En general, en este caso, las condiciones iniciales se consideran cero.

En general podemos obtener una aproximación lineal partiendo de uno no lineal, que será válido en las cercanías de un punto de trabajo en estado estacionario dado $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{d}_0)$, mediante la expansión de las funciones no lineales mediante la serie de Taylor.

Que el punto de trabajo esté en estado estacionario implica que para ese punto se satisface que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{d}_0) \\ \mathbf{y}_0(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Entonces el modelo linealizado en este caso toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t) + \Gamma\tilde{\mathbf{d}}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$, $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0$, $\tilde{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{d}(t) - \mathbf{d}_0$ y $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0$. Además los elementos (i, j) correspondientes a cada matriz del modelo son

$$\mathbf{A}_{ij} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0, \mathbf{d}=\mathbf{d}_0} ; \tag{4.5}$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0, \mathbf{d}=\mathbf{d}_0} ; \tag{4.6}$$

$$\Gamma_{ij} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{d}_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0, \mathbf{d}=\mathbf{d}_0} ; \tag{4.7}$$

$$\mathbf{C}_{ij} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} . \tag{4.8}$$

4.5. Modelos en el Dominio Transformado

Estos modelos relacionan las entradas del proceso (variables manipuladas y perturbaciones) con las variables de salida de acuerdo a la siguiente ecuación algebraica matricial

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{G}_d(s)\mathbf{d}(s) \tag{4.9}$$

donde $\mathbf{G}(s)$ y $\mathbf{G}_d(s)$ se denominan la matriz función transferencia del proceso y de la perturbación. Estas matrices son definidas como

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{12}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{l1}(s) & g_{l2}(s) & \cdots & g_{lm}(s) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_d(s) = \begin{bmatrix} g_{d_{11}}(s) & g_{d_{12}}(s) & \cdots & g_{d_{1v}}(s) \\ g_{d_{12}}(s) & g_{d_{22}}(s) & \cdots & g_{d_{2v}}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{d_{l1}}(s) & g_{d_{l2}}(s) & \cdots & g_{d_{lv}}(s) \end{bmatrix}$$

donde cada elemento de estas matrices es un cociente de polinomios en la variable de Laplace s, pudiendo incluir retardos temporales.

4.6. Modelos Respuesta al Impulso

Este es un modelo que se basa en la convolución lineal de sistemas discretos en tiempo. El modelo respuesta al impulso discreto en el tiempo relaciona la entrada muestreada ($\mathbf{u}(k)$ y $\mathbf{d}(k)$) a la salida muestreda ($\mathbf{y}(k)$)

$$\mathbf{y}(k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{G}(i)\mathbf{u}(k-i) + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{G}_d(i)\mathbf{d}(k-i) \tag{4.10}$$

donde

$$\mathbf{G}(i) = \begin{bmatrix} g_{11}(i) & g_{12}(i) & \cdots & g_{1m}(i) \\ g_{12}(i) & g_{22}(i) & \cdots & g_{2m}(i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{l1}(i) & g_{l2}(i) & \cdots & g_{lm}(i) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_d(i) = \begin{bmatrix} g_{d_{11}}(i) & g_{d_{12}}(i) & \cdots & g_{d_{1v}}(i) \\ g_{d_{12}}(i) & g_{d_{22}}(i) & \cdots & g_{d_{2v}}(i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{d_{l1}}(i) & g_{d_{l2}}(i) & \cdots & g_{d_{lv}}(i) \end{bmatrix}$$

y $g_{jk}(i)$ es la i-ésima muestra de la respuesta al impulso de la entrada k a la salida j.

Esta expresión de la respuesta al impulso puede escribirse en términos de la respuesta al escalón haciendo

$$\beta(k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{G}(i) \tag{4.11}$$

y

$$\mathbf{G}(k) = \beta(k) - \beta(k-1) \tag{4.12}$$

tal que la versión discreta del modelo en respuesta al escalón es:

$$\mathbf{y}(k) = \sum_{i=1}^{k} \beta(i)\Delta\mathbf{u}(k-i) + \sum_{i=1}^{k} \beta_d(i)\Delta\mathbf{d}(k-i) \tag{4.13}$$

donde $\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ y $\Delta\mathbf{d}(k) = \mathbf{d}(k) - \mathbf{d}(k-1)$. Note que es una cuestión de preferencia elegir la forma de respuesta al escalón o al impulso, puesto que las dos son completamente equivalentes.

4.7. Relaciones entre las Formas de Modelos

Dadas las tres formas de representar un modelo que hemos descripto en las secciones anteriores, no es difícil de suponer que cada una de ellas se adapta mejor para realizar distintos análisis o diseños de esquemas de control. Por este motivo, es muy útil analizar la forma de pasar de una a otra, cuando esto sea posible.

4.7.1. Modelo en Espacio de Estados a Dominio Transformado

De todas las relaciones entre formas de modelos, esta es quizás la más importante. La mayor parte de los modelos de procesos son desarrollados partiendo de principios fundamentales (como veremos en el próximo capítulo) y dan como resultados modelos en variables de estado. Sin embargo, clásicamente la forma preferida para el análisis y el diseño de sistemas de control es la forma de función transferencia en el dominio transformado. Pese a esto, luego del análisis y diseño, la simulación del sistema de control y la implementación en tiempo real del controlador, deben desarrollarse en el dominio tiempo, requiriendo nuevamente una forma en espacios de estados.

Cuando el modelo en espacios de estados es lineal, la forma en el dominio transformado correspondiente se obtiene por la transformación de Laplace seguida por una simple manipulación algebraica. El proceso inverso de obtener un modelo en espacio de estados equivalente a una función transferencia se denomina *realización*.

A continuación ilustraremos los procedimientos para convertir una forma a la otra.

Espacio de Estados al Dominio Transformado

Consideremos el modelo lineal multivariable en espacios de estado descripto por la Ec. (4.2). Aplicando la transfomada de Laplace con condiciones iniciales nulas se obtiene,

$$\begin{aligned} s\mathbf{x}(s) = &\quad \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) + \Gamma\mathbf{d}(s) \\ \mathbf{y}(s) = &\quad \mathbf{C}\mathbf{x}(s) \end{aligned} \tag{4.14}$$

que puede ser reagrupada (teniendo en cuenta que son expresiones matriciales) como

$$\mathbf{y}(s) = \left[\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\right]\mathbf{u}(s) + \left[\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\Gamma\right]\mathbf{d}(s) \tag{4.15}$$

que comparada con la Ecuación 4.2 nos dan las expresiones requeridas:

$$\mathbf{G}(s) = \left[\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\right] \tag{4.16}$$

y

$$\mathbf{G}_d(s) = \left[\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\Gamma\right] \tag{4.17}$$

Dominio Transformado al Espacio de Estados

Este problema (realización) no es trivial. En primer lugar, la realización no es única, en el sentido que existen varios conjuntos de ecuaciones diferenciales que dan la misma matriz función transferencia. Además, existen diferentes formas de obtener estas realizaciones equivalentes. En general se requiere una realización que se denomina “minimal” (esto es, que contenga el mínimo número de estados para describir el sistema). Sin embargo, esto escapa a los objetivos de este curso. A continuación presentaremos un ejemplo numérico simple que puede ser de utilidad para entender los pasos a seguir para obtener una realización.

Ejemplo 4.1: Realización de una función transferencia en el dominio transformado de primer orden
Dado el siguiente modelo en función transferencia

$$y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} u(s), \tag{4.18}$$

hallar la representación en variables de estado equivalente.
Solución: Reordenando esta ecuación, podemos escribir el modelo como

$$(\tau s + 1) y(s) = K u(s). \tag{4.19}$$

A partir de aqui es claro que la ecuación difierencial más obvia para obtener esta expresión en el dominio de Laplace es

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K u(t) \tag{4.20}$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0$. Esto puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) &= K u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Este es un modelo en variables de estado equivalente a la Ec. 4.18. Sin embargo, notemos que podemos definir cualquier constante c tal que

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) &= \frac{K}{c} u(t) \\ y(t) &= c x(t) \end{aligned} \tag{4.22}$$

que es otra realización válida.

En este punto es importante resaltar que dada una función transferencia existen infinitos modelos en variables de estado equivalentes. En particular, en el ejemplo, existe un modelo diferente para cada posible valor de c.

4.7.2. Espacio de Estados y Modelos Respuesta Impulsiva

La solución analítica cerrada de la ecuación diferencial en el modelo de espacios de estado (para entradas arbitrarias $u(t)$ y $d(t)$) da la forma equivalente a la respuesta al impulso en tiempo contínuo. Sin embargo esto es posible solo en los casos donde pueden obtenerse soluciones analíticas. Para el caso discreto, es posible muestrear la respuesta al impulso obtenida para obtener un modelo como el de Ec. (4.10).

Veamos la solución analítica del modelo en espacios de estado para una entrada arbitraria, esta es

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\sigma)} \left[\mathbf{B}\mathbf{u}(\sigma) + \Gamma \mathbf{d}(\sigma)\right] d\sigma \tag{4.23}$$

y la salida $\mathbf{y}(t)$ es dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\sigma)} \left[\mathbf{B}\mathbf{u}(\sigma) + \Gamma \mathbf{d}(\sigma)\right] d\sigma \tag{4.24}$$

Si resolvemos esta integral para entradas $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{d}(t)$ impulsivas, y posteriormente muestreamos en tiempo la salida $\mathbf{y}(t)$ obtenemos el modelo respuesta al impulso discreto $\mathbf{g}(i)$.

Si el proceso de obtener la solución analítica de una ecuación diferencial es concebido en su forma más general como una operación matemática de integración, entonces podemos llegar a la conclusión (correcta) de que el proceso inverso de generar un modelo en espacios de estados partiendo de un modelo respuesta al impulso contínuo involucra una diferenciación (cuando esta sea posible). Considerar este caso carece de utilidad para la necesidad de este curso.

4.8. El Concepto de una Función Transferencia

Hasta el momento solo hemos aludido (sin un examen formal) al concepto de función transferencia en la descripción matemática del comportamiento de un proceso. Sin embargo, como resultará claro en lo que resta del curso, el concepto de la función transferencia es central en el estudio de la dinámica y control de procesos. Veamos más profundamente este concepto, válido para modelos lineales.

4.8.1. Un Enfoque Generalizado del Modelo del Proceso

Reiteramos que, hasta ahora, en los estudios de la dinámica y control de procesos, un modelo es una colección de ecuaciones matemáticas por las cuales puede predecirse la salida del proceso ante una entrada dada. El modelo en espacio de estados explicitamente calcula las variables de estado y usa estas para calcular la salida. Sin embargo, aún cuando las varias formas del modelo pueden diferir en la forma de la función de entrada que ellos aceptan, la forma de la respuesta de la salida en general, y la forma en que se genera la salida, son fundamentalmente similares.

Recordemos que

1. Para el modelo en *espacio de estados*, la entrada $u(t)$ está en el dominio tiempo, y la salida del proceso $y(t)$ (en el dominio tiempo) se genera resolviendo las ecuaciones diferenciales.

2. Para modelos continuos en el *dominio transformado*, la entrada es una función de la variable transformada de Laplace $u(s)$, y la salida (también función de s) se genera por el proceso de multiplicar $u(s)$ por la función $g(s)$.

3. Para el modelo *respuesta al impulso*, la entrada $u(i)$ es función del tiempo, y la salida $y(i)$ (en el dominio tiempo) se genera por la convolución de $g(i)$ sobre $u(i)$.

Observemos que en cada caso, las salidas se producen por el proceso de "operar" la entrada dada por una función apropiada. Entonces, en esencia, cada forma de modelo consiste de dos partes,

1. Una función, y
2. Una operación

El principio fundamental en cada caso puede ahora ser establecido como:

La función, por medio de la operación indicada "transfiere" (o transforma) la entrada, $u(.)$, en la salida, $y(.)$, como se describe en la ecuación

$$y(.) = g(.) \bullet u(.) \tag{4.25}$$

donde $\bullet$ representa la operación particular requerida por una forma del modelo específica y $g(.)$ representa la función empleada para "transferir" la entrada $u(.)$ sobre la salida $y(.)$ via la operación indicada. Para una forma del modelo la función $g(.)$ que realiza la tarea notada se denomina como la "función transferencia" del modelo.

Observe ahora que la forma "función transferencia" del modelo matemático representado por la Ec. (4.25) es una representación entrada/salida. Ella puede ser extendida para incluir las entradas perturbaciones:

$$y(.) = g(.) \bullet u(.) + g_d(.) \bullet d(.) \tag{4.26}$$

En principio, todas las formas del modelo discutidas en este capítulo pueden ser considerada en esta forma, donde reconocemos que el argumento (.) y la opciones del operador $g \bullet u$, $g_d \bullet d$ será diferente para cada forma del modelo. Las expresiones matemáticas detalladas para las "funciones transferencia" de cada forma de modelo se muestran en la Tabla 4.1. Observemos que en este contexto:

1. El modelo de espacio de estado existe en el dominio tiempo, y su "función transferencia" involucra una operación consistente en la solución de ecuaciones diferenciales y parece una "función transferencia" explícita en las variables de estado $x(t)$.

2. Por otro lado, el dominio transformado de Laplace, involucra una simple operación de multiplicación, y la "función transferencia" es una función explícita en s.

3. El modelo en respuesta al impulso existe en el dominio tiempo discreto, involucrando una operación de convolución, y es una "función transferencia" en el dominio tiempo discreto.

La conveniencia de trabajar con funciones transferencia se torna más evidente al trabajar con *diagramas de bloques* como se muestra en la Fig. 4.1. El diagrama de bloques muestra en general como la función transferencia relaciona

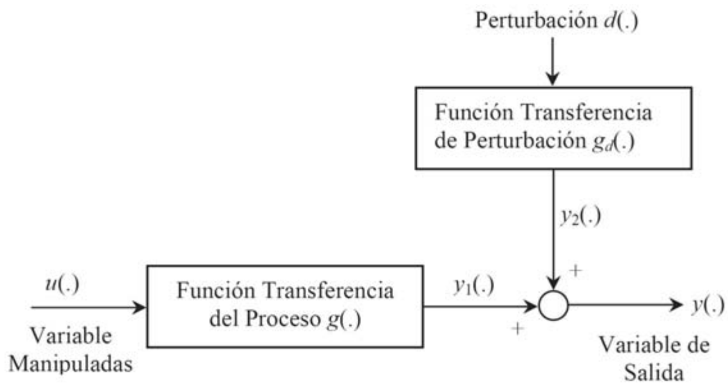

Fig. 4.1. La forma entrada/salida de un modelo deproceso

la variable manipulada de entrada u y la perturbación d con la variable de salida y.

El diagrama de bloques promueve un entendimiento conceptual de que sucede con el proceso cuando se introduce un cambio en el valor de una variable de entrada. La indicación de que la función transferencia (residente en el bloque) "opera" sobre la entrada $u(.)$ para producir un cambio en la salida $y(.)$ no es solo intuitivamente deseable, sino también matematicamente exacta.

Tabla 4.1 Modelos de Funciones Transferencias

Modelo	$g(.) \bullet u(.)$	$g_d(.) \bullet d(.)$	$y(.)$
Espacio de Estados	$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y_1(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \gamma d(t) \\ y_2(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = 0 \end{cases}$	$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
Dominio Transformado	$y_1(s) = g(s)u(s)$	$y_2(s) = g_d(s)d(s)$	$y(s) = y_1(s) + y_2(s)$
Respuesta al Impulso	$y_1(k) = \sum_{i=1} lg(i)u(k-i)$	$y_2(k) = \sum_{i=1} lg_d(i)d(k-i)$	$y(k) = y_1(k) + y_2(k)$